

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 10: Teoria di Grassmann

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Equazioni parametriche · Equazioni cartesiane · Codimensione · Somma e intersezione di sottospazi · Somma diretta · Sottospazi complementari

Indice

1	Equazioni parametriche e cartesiane	1
1.1	Equazioni parametriche	1
1.2	Equazioni cartesiane e codimensione	2
1.3	Come trovare le equazioni cartesiane	3
2	Somma e intersezione di sottospazi	6
2.1	Intersezione	6
2.2	Somma di sottospazi	7
2.3	Teorema di Grassmann	7
3	Somma diretta e sottospazi complementari	8
3.1	Somma diretta	9
3.2	Applicazione: matrici simmetriche e antisimmetriche	10
3.3	Sottospazi complementari	10
3.4	Somma diretta di più sottospazi	11

1 Equazioni parametriche e cartesiane

1.1 Equazioni parametriche

Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Se W è definito come nucleo di un sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$, la soluzione generale di tale sistema, scritta in funzione delle variabili libere, fornisce le **equazioni parametriche** di W .

Definizione – Equazioni parametriche

Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Le **equazioni parametriche** di W sono equazioni che esprimono le componenti di un generico vettore $w \in W$ come funzioni lineari di un certo numero di parametri liberi $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$W : \begin{cases} x_1 = a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1k}\lambda_k \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nk}\lambda_k \end{cases} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Il numero k di parametri indica la dimensione di W : $\dim W = k$.

Nota – Come scrivere le equazioni parametriche

Ci sono due situazioni tipiche:

1. Se W è dato come insieme di soluzioni di un sistema lineare omogeneo, si risolve con il metodo di Rouché-Capelli (o riduzione di Gauss-Jordan) e si ottengono automaticamente le equazioni parametriche.
2. Se $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_m)$ è dato tramite i suoi generatori, si scrive la generica combinazione lineare:

$$x = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}.$$

Una base di W si legge immediatamente dalle equazioni parametriche raccogliendo i coefficienti di ciascun parametro.

Esercizio Svolto 1

Trovare una base, la dimensione e le equazioni parametriche di

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 0, x_1 + x_3 + x_5 = 0, x_2 - x_4 - x_5 = 0\}.$$

Soluzione. Risolviamo il sistema omogeneo con il metodo di Rouché-Capelli. La matrice dei coefficienti ha rango 3, quindi $\dim W = 5 - 3 = 2$. Scegliendo x_4 e x_5 come parametri liberi si ottiene:

$$x_1 = -x_4 - 3x_5, \quad x_2 = x_4 + x_5, \quad x_3 = x_4 + 2x_5.$$

Queste sono le **equazioni parametriche** di W . Ponendo $(x_4, x_5) = (1, 0)$ e poi $(0, 1)$ si ottiene la base:

$$\mathcal{B}_W = \{(-1, 1, 1, 1, 0), (-3, 1, 2, 0, 1)\}.$$

Nota – Attenzione ai falsi parametri

Non basta contare i simboli per determinare la dimensione: occorre verificare che i parametri siano effettivamente indipendenti. Consideriamo

$$\begin{cases} x_1 = -t + 2s \\ x_2 = t - 2s \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 2t - 4s \end{cases}$$

I due generatori corrispondenti sono $(-1, 1, 0, 2)$ e $(2, -2, 0, -4)$, che sono proporzionali. Quindi s è un **falso parametro**: $\dim W = 1$, non 2.

Risolvendo correttamente un sistema omogeneo con Rouché-Capelli o Gauss-Jordan, i falsi parametri non compaiono mai: si producono solo se le equazioni parametriche sono assegnate direttamente senza partire da un sistema.

1.2 Equazioni cartesiane e codimensione

Definizione – Equazioni cartesiane

Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Un sistema di equazioni lineari omogenee

$$W : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

si dice sistema di **equazioni cartesiane** di W se la sua soluzione è esattamente W e il sistema ha *rango massimo* r (cioè nessuna equazione è ridondante).

Nota – Attenzione!

Le equazioni cartesiane devono essere tutte *necessarie*: nessuna può essere conseguenza delle altre. Un sistema con equazioni ridondanti *non* è un valido sistema di equazioni cartesiane. Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

ha rango 2 (la terza equazione è multiplo della seconda), quindi le equazioni cartesiane effettive sono solo le prime due.

Definizione – Codimensione

Sia W un sottospazio di uno spazio vettoriale V di dimensione n . La **codimensione** di W , indicata con $\text{codim } W$, è il numero minimo di equazioni cartesiane omogenee

necessarie per descrivere W :

$$\text{codim } W = n - \dim W.$$

Teorema – della codimensione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $W \subseteq V$ un sottospazio di dimensione m . Allora W è descritto da esattamente $n - m$ equazioni cartesiane omogenee linearmente indipendenti, e vale la relazione fondamentale:

$$\dim W + \text{codim } W = n.$$

Dimostrazione

Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W . Costruiamo la matrice A di tipo $m \times n$ avente per righe le coordinate di $w_1, \dots, w_m$ rispetto a una base fissata di V . Poiché i vettori sono linearmente indipendenti, $\text{rk } A = m$, quindi esiste un minore $m \times m$ non nullo. Il generico vettore $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ appartiene a W se e solo se è combinazione lineare di $w_1, \dots, w_m$, ovvero se e solo se, aggiungendo la riga $(x_1, \dots, x_n)$ ad A , il rango non aumenta, cioè resta m .

Per il principio degli orlati di Kronecker, questa condizione equivale all'annullamento di tutti i minori orlati di ordine $m + 1$ del minore $m \times m$ non nullo fissato. Il numero di colonne disponibili per l'orlatura è $n - m$, quindi si ottengono $n - m$ equazioni lineari omogenee in $x_1, \dots, x_n$. Si verifica che queste sono linearmente indipendenti, dunque $\text{codim } W = n - m$. $\square$

Nota – Interpretazione

Il Teorema 1.2 è una riformulazione del teorema di Rouché-Capelli: se $W = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\}$ e $\text{rk } A = r$, allora $\dim W = n - r$, quindi $\text{codim } W = r$ è il rango del sistema che definisce W .

Proposizione – Dimensione dei sottospazi

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e $W \subseteq V$ un sottospazio. Allora $\dim W \leq \dim V$, con uguaglianza se e solo se $W = V$.

1.3 Come trovare le equazioni cartesiane

Ci sono due metodi principali per ricavare le equazioni cartesiane di un sottospazio dato mediante i suoi generatori.

Metodo 1: Eliminazione dei parametri

Si scrivono le equazioni parametriche e si eliminano i parametri per sostituzione, ricavandone uno alla volta.

Esercizio Svolto 2

Trovare le equazioni cartesiane di $W = \mathcal{L}((1, 1, 2), (1, 0, 2)) \subset \mathbb{R}^3$.

Soluzione. Le equazioni parametriche sono:

$$x = \lambda + \mu, \quad y = \lambda, \quad z = 2\lambda + 2\mu.$$

Da $y = \lambda$ e dalla prima, $\mu = x - y$. Sostituendo nella terza:

$$z = 2y + 2(x - y) = 2x.$$

L'equazione cartesiana è $2x - z = 0$. Verifica: $\dim W = 2$, $\text{codim } W = 3 - 2 = 1$.
✓

Esercizio Svolto 3

Trovare le equazioni cartesiane di $W \subset \mathbb{R}^4$ date le equazioni parametriche

$$x_1 = 2\lambda + \mu, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = \lambda - 3\mu, \quad x_4 = \mu.$$

Soluzione. Stima preliminare: due parametri, quindi $\dim W = 2$ e $\text{codim } W = 2$: cerchiamo due equazioni. Da $x_2 = \lambda$ e dalla prima, $\mu = x_1 - 2x_2$. Sostituendo:

$$x_3 = x_2 - 3(x_1 - 2x_2) = -3x_1 + 7x_2, \quad x_4 = x_1 - 2x_2.$$

Le equazioni cartesiane sono:

$$W : \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Metodo 2: Principio degli orlati di Kronecker

Questo metodo è più generale e si usa soprattutto quando le equazioni parametriche sono di difficile eliminazione, oppure quando il sottospazio è dato direttamente tramite generatori.

Sia $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\dim W = m$. Si costruisce la matrice A di tipo $m \times n$ avente per righe le coordinate dei generatori (una base di W). Aggiungendo la riga del vettore generico $x = (x_1, \dots, x_n)$ si ottiene la matrice

$$B = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \\ x_1 \cdots x_n \end{pmatrix}.$$

Il vettore x appartiene a W se e solo se $\text{rk } B = m$. Poiché A ha rango m , esiste un minore $m \times m$ non nullo in A ; per il principio degli orlati di Kronecker, tutti i minori di ordine $m+1$ di B che orlano quel minore devono essere nulli. Ciascun tale minore è un'equazione lineare omogenea in $x_1, \dots, x_n$, e si ottengono esattamente $n - m$ equazioni indipendenti.

Nota – Caso $\dim W$

Se $m = n - 1$, si cerca una sola equazione cartesiana. Nel caso $n = 3$, $m = 2$, si può semplicemente porre il determinante della matrice 3×3 formata dalle righe di w_1 , w_2 e del vettore generico (x, y, z) uguale a zero.

Esercizio Svolto 4

Trovare equazioni cartesiane di $U = \mathcal{L}((1, 1, 0, -2), (2, 1, 0, 1)) \subset \mathbb{R}^4$.

Soluzione. $\dim U = 2$, $\text{codim } U = 2$: servono due equazioni. Costruiamo la matrice aumentata con il vettore generico (x_1, x_2, x_3, x_4) :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Il minore 2×2 non nullo in A è quello nelle colonne 1 e 2: $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$. Orliamo con la terza riga e le colonne 3 e 4 separatamente:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_3 = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} = 3x_2 - 5x_1 - x_4 = 0.$$

Le equazioni cartesiane di U sono:

$$U : \begin{cases} x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Esercizio Svolto 5

Trovare equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio

$$W = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \mid p(0) = 0, p'(1) = 0\}.$$

Soluzione. Scrivendo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, le condizioni si traducono in:

$$d = 0, \quad 3a + 2b + c = 0.$$

Queste sono già le **equazioni cartesiane** di W in termini delle coordinate (a, b, c, d) rispetto alla base canonica $\{x^3, x^2, x, 1\}$.

Il rango è 2, quindi $\dim W = 4 - 2 = 2$ e $\text{codim } W = 2$. Scegliendo $a = \lambda$, $b = \mu$ come parametri liberi: $c = -3\lambda - 2\mu$, $d = 0$. Le equazioni parametriche sono:

$$p(x) = \lambda x^3 + \mu x^2 - (3\lambda + 2\mu)x = \lambda(x^3 - 3x) + \mu(x^2 - 2x).$$

Una base di W è $\{x^3 - 3x, x^2 - 2x\}$.

Esercizio Svolto 6

Trovare equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Soluzione. Identificando $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con (a, b, c, d) , le equazioni parametriche sono:

$$W : \begin{cases} a = \lambda_1 + \lambda_2 \\ b = \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ c = 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ d = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3. \end{cases}$$

Poiché $\dim W = 3$ in uno spazio di dimensione 4, la codimensione è 1: cerchiamo un'equazione. Ricaviamo $\lambda_1 = a - \lambda_2$ dalla prima; sostituendo nella seconda otteniamo $\lambda_2 = b - a + \lambda_3$; sostituendo nella terza si trova $c = 3a - b$, ovvero:

$$W : 3a - b - c = 0.$$

2 Somma e intersezione di sottospazi

2.1 Intersezione

Proposizione – Intersezione di sottospazi

Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W sottospazi di V . L'intersezione

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ e } v \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di V .

Nota – Come calcolare l'intersezione

Ci sono due strategie principali:

1. **Via equazioni cartesiane:** se U e W sono definiti per mezzo di sistemi omogenei, $U \cap W$ è definito dall'unione dei due sistemi.
2. **Via generatori:** si impone che il generico elemento di U (scritto come combinazione lineare dei generatori di U) coincida con il generico elemento di W (scritto come combinazione lineare dei generatori di W), e si risolve il sistema lineare risultante.

Nota – Catena di inclusioni

Dati due sottospazi U e W di V , vale sempre:

$$U \cap W \subseteq \frac{U}{W} \subseteq U + W.$$

2.2 Somma di sottospazi

Definizione – Somma di sottospazi

Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W suoi sottospazi. La **somma**

$$U + W = \{u + w \in V \mid u \in U, w \in W\}$$

è il più piccolo sottospazio di V che contiene sia U che W .

Proposizione – Generatori della somma

Se $U = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_m)$ e $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_k)$, allora

$$U + W = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k).$$

Nota – Attenzione!

L'unione delle basi di U e W è in generale solo un sistema di generatori di $U + W$, *non* necessariamente una base. Per trovare una base di $U + W$ si dispone i generatori in riga in una matrice e si applica il metodo dei minori (o la riduzione di Gauss).

2.3 Teorema di Grassmann

Teorema – di Grassmann

Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W suoi sottospazi finitamente generati. Allora vale la **formula di Grassmann**:

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

Dimostrazione

Sia $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{v_1, \dots, v_r\}$ una base di $U \cap W$. Per il teorema del completamento della base, si estende a una base $\mathcal{B}'_U = \{v_1, \dots, v_r, u'_{r+1}, \dots, u'_m\}$ di U e a una base $\mathcal{B}'_W = \{v_1, \dots, v_r, w'_{r+1}, \dots, w'_n\}$ di W .

I vettori $\{v_1, \dots, v_r, u'_{r+1}, \dots, u'_m, w'_{r+1}, \dots, w'_n\}$ generano $U + W$ e sono in numero $m + n - r$. Dobbiamo mostrare che sono linearmente indipendenti.

Sia

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{j=r+1}^m \mu_j u'_j + \sum_{h=r+1}^n \nu_h w'_h = \mathbf{0}.$$

Spostando i termini di W a destra, il membro sinistro appartiene a U e il destro

appartiene a W , quindi entrambi stanno in $U \cap W$ e possono essere scritti come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_r$. Poiché $\mathcal{B}'_W$ è una base di W , si deduce $\nu_{r+1} = \dots = \nu_n = 0$, e poi $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \dots = \mu_m = 0$. Dunque $\dim(U + W) = m + n - r = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. $\square$

Esercizio Svolto 7

Trovare una base e la dimensione di $U + W$ e di $U \cap W$ per i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, -1)), \quad W = \mathcal{L}((3, 2, 2, 1), (0, 0, 1, -1)).$$

Soluzione. Si trova che $\dim U = 3$ e $\dim W = 2$ (controllando l'indipendenza lineare). I generatori di U e W presi insieme formano un sistema di generatori di $U + W = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, w_1, w_2)$. Calcolando il rango della matrice dei cinque generatori si trova $\text{rk} = 4$, quindi $\dim(U + W) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, ovvero $U + W = \mathbb{R}^4$. Per Grassmann:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Poiché $(3, 2, 2, 1)$ è linearmente dipendente dai generatori di U (il determinante corrispondente è nullo), questo vettore appartiene anche a U , quindi $U \cap W = \mathcal{L}(3, 2, 2, 1)$.

Esercizio Svolto 8

In $\mathbb{R}^4$, determinare $U \cap W$ con

$$U : \begin{cases} x + z + t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + t = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Essendo entrambi definiti per equazioni cartesiane, $U \cap W$ è definito dall'unione dei due sistemi:

$$U \cap W : \begin{cases} x + z + t = 0 \\ x + t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + t = 0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha determinante non nullo, quindi il sistema ha solo la soluzione banale: $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

3 Somma diretta e sottospazi complementari

3.1 Somma diretta

Definizione – Somma diretta

Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W suoi sottospazi vettoriali. Si dice che U e W sono **a somma diretta** (o che sono *sommandi diretti*) se

$$U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}.$$

In tal caso si scrive $U \oplus W$ al posto di $U + W$.

Il simbolo $\oplus$ (“cerchio più”) distingue la somma diretta dalla somma ordinaria: indica che la somma gode della proprietà aggiuntiva di intersezione banale.

Proposizione – Formula di Grassmann per la somma diretta

Siano U e W sottospazi finitamente generati a somma diretta. Allora:

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$$

Dimostrazione

Segue immediatamente dalla formula di Grassmann con $\dim(U \cap W) = 0$. □

Teorema – della somma diretta

Siano U, W sottospazi di V . La somma $U + W$ è diretta se e solo se ogni vettore di $U + W$ si scrive in maniera **unica** come somma di un elemento di U e un elemento di W :

$$U \oplus W \iff \forall v \in U + W, \exists! u \in U, \exists! w \in W : v = u + w.$$

Dimostrazione

Supponiamo che la somma sia diretta. Se $v = u + w = u' + w'$ con $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$, allora $u - u' = w' - w$. Il membro sinistro sta in U e il destro in W , dunque entrambi stanno in $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, da cui $u = u'$ e $w = w'$.

Viceversa, se ogni v si scrive in maniera unica, supponiamo $v \in U \cap W$. Allora $v = v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v$, con la prima scrittura come $u + w$ con $u = v \in U$, $w = \mathbf{0}$ e la seconda con $u = \mathbf{0}$, $w = v \in W$. Per l'unicità $v = \mathbf{0}$, quindi $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. □

Proposizione – Criterio con le basi

Siano $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_m\}$ una base di U e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_k\}$ una base di W . Un sottospazio T di V soddisfa $T = U \oplus W$ se e solo se $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k\}$ è una base di T .

Nota – Quando la somma diretta è impossibile

Per il teorema di Grassmann, due sottospazi U e W di $\mathbb{R}^n$ possono essere in somma diretta solo se $\dim U + \dim W \leq n$. Ad esempio, due piani (sottospazi di dimensione

2) in $\mathbb{R}^3$ non possono mai essere in somma diretta, perché $\dim U + \dim W = 4 > 3$.

3.2 Applicazione: matrici simmetriche e antisimmetriche

Definizione – Matrici simmetriche e antisimmetriche

Sia $\mathcal{S}_n = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S^T = S\}$ lo spazio delle **matrici simmetriche** e $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ lo spazio delle **matrici antisimmetriche** di ordine n . Entrambi sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Teorema – Decomposizione simmetrica-antisimmetrica

Vale la somma diretta:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n.$$

Le dimensioni sono:

$$\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dimostrazione

Intersezione banale. Se $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$, allora $M^T = M$ e $M^T = -M$, da cui $M = -M$, ovvero $M = 0$. Quindi $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.

Decomposizione. Per ogni $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M = \underbrace{\frac{M + M^T}{2}}_{\in \mathcal{S}_n} + \underbrace{\frac{M - M^T}{2}}_{\in \mathcal{A}_n}.$$

Questa decomposizione è unica per il Teorema 3.1, quindi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

Dimensioni. Una matrice simmetrica è determinata dai suoi n elementi diagonali e dai $\frac{n(n-1)}{2}$ elementi del triangolo superiore (per la somma di Gauss $1 + 2 + \dots + (n-1)$), quindi $\dim \mathcal{S}_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Per le antisimmetriche, la diagonale è nulla ($a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$), restano solo i $\frac{n(n-1)}{2}$ elementi fuori diagonale del triangolo superiore. Verifica: $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ✓ □

3.3 Sottospazi complementari

Definizione – Sottospazi complementari

Siano U e W sottospazi di V . Si dice che U e W sono **sottospazi complementari** (o che W è un *complemento diretto* di U) se

$$U \oplus W = V.$$

Teorema – del complemento diretto

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia U un suo sottospazio. Allora esiste sempre un sottospazio W di V tale che $U \oplus W = V$.

Dimostrazione

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di U . Per il teorema del completamento della base, si estende a una base $\{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_{n-m}\}$ di V . Si definisce $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_{n-m})$. L'unione delle due basi è una base di V , quindi $U + W = V$, e l'indipendenza lineare garantisce $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, dunque $U \oplus W = V$. $\square$

Nota – Il complemento diretto non è unico

Il complemento diretto di un sottospazio U non è univocamente determinato: esistono in generale infiniti possibili complementi. Ad esempio, in $\mathbb{R}^3$, un complemento del piano $U = \mathcal{L}(e_1, e_2)$ può essere $\mathcal{L}(e_3)$, ma anche $\mathcal{L}(e_1 + e_3)$, o qualsiasi altra retta non contenuta in U .

3.4 Somma diretta di più sottospazi

La nozione di somma diretta si generalizza a più di due sommandi.

Teorema

Siano $V_1, \dots, V_s$ sottospazi finitamente generati di V . La somma $S = V_1 + \dots + V_s$ è diretta se e solo se, dette $\mathcal{B}_i$ basi di V_i , l'unione $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_s$ è una base di S . Equivalentemente, $S = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ se e solo se ogni vettore di S si scrive in maniera unica come $v_1 + \dots + v_s$ con $v_i \in V_i$.

Esercizio Svolto 9

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono in somma diretta?

$$E = \mathcal{L}((1, 0, 2), (k, -k, 0)), \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}.$$

Soluzione. **Caso $k = 0$:** il secondo generatore di E diventa $\mathbf{0}$, quindi $E = \mathcal{L}(1, 0, 2)$ (dimensione 1) mentre F è un piano (dimensione 2). Il vettore $(1, 0, 2)$ soddisfa $1 - 0 + 4 = 5 \neq 0$, quindi non appartiene a F : $E \not\subseteq F$. Tuttavia $\dim E + \dim F = 3$ in $\mathbb{R}^3$, quindi per Grassmann dovremmo avere $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$. In effetti $\dim(E \cap F) = 1 + 2 - \dim(E + F)$; se $E + F = \mathbb{R}^3$ allora $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$ e sarebbe somma diretta. Ma verifichiamo: $(1, 0, 2) \notin F$ quindi $E + F$ contiene vettori non in F , quindi $E + F = \mathbb{R}^3$. Tuttavia la somma diretta richiederebbe $\dim(E \oplus F) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, che è possibile. Quindi per $k = 0$: *non si può concludere immediatamente a priori* che non siano in somma diretta; il vero nodo è il caso $k \neq 0$.

Caso $k \neq 0$: E ha dimensione 2 (i due generatori sono indipendenti per $k \neq 0$) e F ha dimensione 2. Per Grassmann, $\dim(E + F) \leq 3$, quindi $\dim(E \cap F) = 2 + 2 - \dim(E + F) \geq 1 > 0$. Pertanto $E \cap F \neq \{\mathbf{0}\}$: la somma non è diretta.

Risposta: per nessun valore di k i due sottospazi sono in somma diretta.