

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 11: Applicazioni Lineari

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Definizione e proprietà · Teorema di estensione · Matrice associata ·
Teorema di rappresentazione · Immagine

Indice

1	Applicazioni lineari	1
2	Il Teorema di estensione	3
2.1	Metodo del sistema (metodo diretto)	4
2.2	Metodo delle combinazioni lineari	4
2.3	Casi patologici: quando non c'è una base in partenza	6
3	Matrice associata	7
3.1	Ricetta per costruire la matrice associata	8
3.2	Casi particolari notevoli	9
4	Teorema di rappresentazione	9
5	Legge del cambiamento della matrice associata	10
6	Immagine di un'applicazione lineare	11
7	Controimmagine e nucleo	12
7.1	Controimmagine	12
7.2	Nucleo	13
8	Teorema del rango	14
8.1	Criteri di iniettività e suriettività	14
9	Isomorfismi	16
10	Composizione di applicazioni lineari	17
10.1	Applicazioni invertibili e matrice inversa	18

1 Applicazioni lineari

Definizione – Applicazione lineare

Siano V e W due spazi vettoriali. Una funzione $F : V \rightarrow W$ si dice *applicazione lineare* se valgono entrambe le seguenti condizioni:

- (i) $F(v + v') = F(v) + F(v')$ per ogni $v, v' \in V$;
- (ii) $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$.

Le due proprietà affermano che F *conserva* la somma e la moltiplicazione per scalare.

Nota – Criterio compatto

Le due condizioni si possono fondere in un'unica: F è lineare se e solo se

$$F(\lambda v + \mu v') = \lambda F(v) + \mu F(v')$$

per ogni $v, v' \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Esempi fondamentali

1. L'applicazione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y) = (x, 0, x - y)$ è lineare (verifica diretta dalle definizioni).
2. La funzione seno $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *non* è lineare: si ha, ad esempio, $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 0 \neq 2 = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}$. Anche $f(x) = x^2$ non è lineare (è *quadratica*).
3. L'**applicazione nulla** $0_{V,W} : V \rightarrow W, v \mapsto \mathbf{0}_W$, è banalmente lineare.
4. L'**applicazione identica** $\text{Id}_V : V \rightarrow V, v \mapsto v$, è anch'essa lineare.
5. L'applicazione $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definita da

$$F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b)x^2 + cx - 2d$$

è lineare (verifica con la linearità delle operazioni sui polinomi).

6. La derivazione $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ è lineare, in quanto

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g, \quad \frac{d}{dx}(\lambda f) = \lambda \frac{d}{dx}f.$$

Anche l'integrazione definita su un intervallo $[a, b]$ è lineare.

Proposizione – Criterio per la linearità

Siano V e W due spazi vettoriali. Una funzione $F : V \rightarrow W$ è un'applicazione

lineare se e solo se

$$F(\lambda v + \mu v') = \lambda F(v) + \mu F(v')$$

per ogni $v, v' \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Supponiamo F lineare. Usando prima l'additività e poi l'omogeneità: $F(\lambda v + \mu v') = F(\lambda v) + F(\mu v') = \lambda F(v) + \mu F(v')$.

($\Leftarrow$) Prendendo $\lambda = \mu = 1$ si ottiene l'additività; prendendo $\mu = 0$ si ottiene l'omogeneità. $\square$

Proposizione – Moltiplicazione a sinistra per una matrice

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. L'applicazione $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definita da

$$F(X) = A \cdot X, \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

è lineare.

Dimostrazione

Per le proprietà del prodotto riga per colonna: $F(X + X') = A(X + X') = AX + AX' = F(X) + F(X')$, e $F(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda F(X)$. $\square$

Proposizione – Proprietà elementari

Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora:

- (i) $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$;
- (ii) $F(-v) = -F(v)$ per ogni $v \in V$.

Dimostrazione

- (i) $\mathbf{0}_V = 0_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{0}_V$, quindi $F(\mathbf{0}_V) = F(0_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{0}_V) = 0_{\mathbb{R}} \cdot F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
- (ii) $-v = (-1) \cdot v$, quindi $F(-v) = F((-1) \cdot v) = (-1) \cdot F(v) = -F(v)$. $\square$

Nota – Controesempio utile

L'applicazione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + 1, 0)$, non è lineare: $F(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$, violando la proprietà (i) della Proposizione 1.

La prossima osservazione è fondamentale e viene usata continuamente.

Proposizione – Conservazione delle combinazioni lineari

Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Allora

$$F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_k F(v_k).$$

In breve: *un'applicazione lineare conserva le combinazioni lineari.*

Questo fatto è cruciale per i casi patologici del Teorema di estensione: se $\sum \lambda_i v_i = \mathbf{0}$, allora necessariamente $\sum \lambda_i F(v_i) = \mathbf{0}$.

Proposizione – Uguaglianza su una base

Siano V e W spazi vettoriali con V finitamente generato. Siano $F, G : V \rightarrow W$ applicazioni lineari e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Allora $F = G$ se e solo se $F(v_i) = G(v_i)$ per ogni i .

In altre parole, due applicazioni lineari sono uguali non appena concordano su una base del dominio: per il resto tutto è determinato dalla linearità.

Restrizione di un'applicazione lineare

Data $F : V \rightarrow W$ e un sottospazio $U \subseteq V$, si definisce la *restrizione* di F ad U come l'applicazione

$$F|_U : U \longrightarrow W, \quad u \longmapsto F(u).$$

È la stessa funzione F , ma con dominio ridotto ad U . In particolare:

- la restrizione dell'applicazione nulla ad U è l'applicazione nulla da U a W ;
- la restrizione dell'identità di V ad U è l'identità di U .

2 Il Teorema di estensione

Il prossimo teorema è il risultato centrale di questo capitolo. Risponde alla domanda: *dati alcuni vettori del dominio e le loro immagini candidate, esiste un'applicazione lineare che le realizzi?*

L'analogia con l'*interpolazione polinomiale* è illuminante: dati $n + 1$ punti nel piano, esiste un unico polinomio di grado n che li interpola. Il Teorema di estensione è l'analogo vettoriale: dati i valori su una base, esiste un'unica applicazione lineare che li realizza.

Teorema – di estensione

Siano V e W spazi vettoriali con V finitamente generato. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, w_2, \dots, w_n \in W$ vettori arbitrari. Allora esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ tale che

$$F(v_i) = w_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione

Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ (unicità della decomposizione in base). Si definisce

$$F(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i.$$

Linearità. Siano $v = \sum \alpha_i v_i$ e $v' = \sum \mu_i v_i$. Allora

$$F(v + v') = F\left(\sum (\alpha_i + \mu_i) v_i\right) = \sum (\alpha_i + \mu_i) w_i = \sum \alpha_i w_i + \sum \mu_i w_i = F(v) + F(v').$$

Similmente $F(\lambda v) = \lambda F(v)$.

$F(v_i) = w_i$. Poiché $v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n$, per definizione $F(v_i) = w_i$.

Unicità. Qualsiasi altra G con le stesse proprietà coincide con F su tutta la base $\mathcal{B}$, dunque $G = F$ per la Proposizione 1. $\square$

Nota – Attenzione all'ipotesi di base

Il teorema richiede che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia una *base* di V . Se i vettori in partenza *non* formano una base, si possono verificare due situazioni distinte (v. gli Esempi 2.3 e 2.3).

2.1 Metodo del sistema (metodo diretto)

Il modo più operativo di costruire F quando $V = \mathbb{R}^n$ e si usa la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ consiste nello scrivere $F(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots)$ e imporre le condizioni $F(v_i) = w_i$ come sistema lineare nelle incognite a_{ij} .

Esercizio Svolto – Costruzione con il metodo del sistema

Costruire $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $F(1, -1) = (1, -1)$ e $F(1, 2) = (1, 0)$.

Soluzione. Poiché $\{(1, -1), (1, 2)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ (determinante = $3 \neq 0$), il Teorema 2 garantisce l'esistenza e l'unicità di F . Scriviamo $F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ e imponiamo le condizioni:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \implies b = 0, a = 1 \quad (\text{prima coordinata})$$

$$\begin{cases} c - d = -1 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \implies d = -\frac{1}{3}, c = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \quad (\text{seconda coordinata})$$

Dunque

$$F(x, y) = \left(x, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right).$$

Verifica: $F(1, -1) = (1, -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = (1, 0)$... ricontrolliamo con il metodo delle combinazioni lineari nella prossima sezione.

2.2 Metodo delle combinazioni lineari

Questo metodo, più vicino alla dimostrazione del teorema, sfrutta la base canonica come punto di riferimento.

Idea. Se si conosce $F(1, 0)$ e $F(0, 1)$ (immagini della base canonica), allora per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = F(x(1, 0) + y(0, 1)) = x F(1, 0) + y F(0, 1).$$

Il trucco è calcolare $F(1, 0)$ e $F(0, 1)$ *indirettamente*: si scrivono i vettori canonici come combinazioni lineari dei vettori di cui si conosce l'immagine, poi si applica F .

Esercizio Svolto – Costruzione con combinazioni lineari

Riprendiamo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $F(1, -1) = (1, -1)$ e $F(1, 2) = (1, 0)$.

Soluzione.

Passo 1. Scrivo la base canonica come combinazione lineare della base data:

$$(1, 0) = \frac{2}{3}(1, -1) + \frac{1}{3}(1, 2), \quad (0, 1) = -\frac{1}{3}(1, -1) + \frac{1}{3}(1, 2).$$

(Verifica del primo: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$, $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$. ✓)

Passo 2. Applico F usando la linearità:

$$\begin{aligned} F(1, 0) &= \frac{2}{3}F(1, -1) + \frac{1}{3}F(1, 2) = \frac{2}{3}(1, -1) + \frac{1}{3}(1, 0) = (1, -\frac{2}{3}), \\ F(0, 1) &= -\frac{1}{3}F(1, -1) + \frac{1}{3}F(1, 2) = -\frac{1}{3}(1, -1) + \frac{1}{3}(1, 0) = (0, \frac{1}{3}). \end{aligned}$$

Passo 3. Ricostruisco F :

$$F(x, y) = x F(1, 0) + y F(0, 1) = x(1, -\frac{2}{3}) + y(0, \frac{1}{3}) = (x, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y).$$

Confronto con il metodo diretto: il risultato è lo stesso, ma il metodo delle combinazioni lineari funziona in qualsiasi spazio vettoriale (anche con basi non canoniche e codomini astratti).

Nota – Trucco per semplificare i conti

Se due vettori della base data hanno componenti opposte su una delle coordinate, la loro somma elimina quella coordinata e fornisce direttamente un multiplo di un vettore canonico. Ad esempio, se si hanno $(2, 1)$ e $(1, -1)$, la loro somma è $(3, 0)$, quindi $(1, 0) = \frac{1}{3}(2, 1) + \frac{1}{3}(1, -1)$ senza risolvere nessun sistema.

Esercizio Svolto – Dominio e codominio diversi

Costruire $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ tale che $F(2, 1) = x^2 + 1$ e $F(1, -1) = 1 - x$.

Soluzione. I vettori $(2, 1)$ e $(1, -1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$ (determinante $= -3 \neq 0$). Per il *trucco*: $(2, 1) + (1, -1) = (3, 0)$, quindi $(1, 0) = \frac{1}{3}(2, 1) + \frac{1}{3}(1, -1)$.

$$\begin{aligned} F(1, 0) &= \frac{1}{3}(x^2 + 1) + \frac{1}{3}(1 - x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \\ F(0, 1) &= F(1, 0) - F(1, -1) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) - (1 - x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

L'espressione generale è $F(a, b) = a F(1, 0) + b F(0, 1)$, ovvero in coordinate rispetto alla base canonica $\{x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:

$$F(a, b) = \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3}\right)x^2 + \left(-\frac{a}{3} + \frac{2b}{3}\right)x + \left(\frac{2a}{3} - \frac{b}{3}\right).$$

2.3 Casi patologici: quando non c'è una base in partenza

Quando i vettori dati in partenza *non* formano una base di V , il Teorema 2 non si applica direttamente. Si possono verificare due scenari.

Esercizio Svolto – F non esiste

Stabilire se esiste $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $F(1, -1, 2) = (2, 0)$, $F(1, 0, -2) = (-1, 1)$, $F(2, -1, 0) = (0, 0)$.

Soluzione. Osserviamo che $(2, -1, 0) = (1, -1, 2) - (1, 0, -2)$, cioè il terzo vettore è combinazione lineare dei primi due. Per la Proposizione 1, se F fosse lineare dovrebbe valere

$$F(2, -1, 0) = F(1, -1, 2) - F(1, 0, -2) = (2, 0) - (-1, 1) = (3, -1).$$

Invece ci viene richiesto $F(2, -1, 0) = (0, 0) \neq (3, -1)$.

Condizione necessaria violata $\Rightarrow F$ **non esiste**.

Esercizio Svolto – Infinite soluzioni

Stabilire se esiste $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $F(1, -1, 2) = (2, 0)$, $F(1, 0, -2) = (-1, 1)$, $F(3, -1, 0) = (1, 0)$.

Soluzione. Si verifica che $(3, -1, 0) = (1, -1, 2) + (1, 0, -2)$; la condizione di linearità dà $F(3, -1, 0) = (2, 0) + (-1, 1) = (1, 1) \neq (1, 0)$... si noti che questa volta il valore assegnato $F(3, -1, 0) = (1, 0)$ è consistente: si verifica che $(1, -1, 0) = (1, -1, 2) + (1, 0, -2)$ e la terza condizione compatibile fa sì che F esista, ma non è unica perché i tre vettori non formano una base di $\mathbb{R}^3$ (ne generano solo un sottospazio bidimensionale).

Si può completare la base di $\mathbb{R}^3$ in infiniti modi, e per ognuno si ottiene una F diversa. Alcune soluzioni:

$$F_1(x, y, z) = (3x + y - 3z, -x - y + z), \quad F_2(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

Regola. Se i vettori dati in partenza sono dipendenti e le loro immagini rispettano la stessa relazione di dipendenza, allora F esiste ma *non è unica*. Se le immagini non rispettano tale relazione, F non esiste.

Esercizio Svolto – Restrizione a un sottospazio

Sia $U = \mathcal{L}((1, 2, 0), (1, 1, -1)) \subseteq \mathbb{R}^3$. Determinare se esiste $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$F|_U = 0_U, \quad F(2, 4, 0) = (0, 0, 0), \quad F(1, 1, 1) = (1, 1, 1).$$

Soluzione. La condizione $F|_U = 0_U$ equivale, per linearità, a richiedere che F si annulli sui generatori di U :

$$F(1, 2, 0) = (0, 0, 0), \quad F(1, 1, -1) = (0, 0, 0).$$

La condizione $F(2, 4, 0) = (0, 0, 0)$ è ridondante: $(2, 4, 0) = 2(1, 2, 0)$, e per linearità basta che $F(1, 2, 0) = \mathbf{0}$.

Rimangono quindi tre condizioni indipendenti sui vettori $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. Calcoliamo il determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -5 \neq 0.$$

Poiché $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, per il Teorema 2 **esiste ed è unica** l'applicazione F con le proprietà richieste.

Nota – Unicità e base del sottospazio

L'unicità vale perché abbiamo fissato i valori su una base di *tutto* $\mathbb{R}^3$. Se invece specificassimo solo $F|_U = 0_U$ senza aggiungere $F(1, 1, 1)$, non avremmo una base completa: cambiando la base di U (ad es. prendendo $(2, 3, -1)$ invece di $(1, 2, 0)$) si otterrebbe un'applicazione F diversa. Le F compatibili con $F|_U = 0_U$ sono infinite.

3 Matrice associata

Lavorando con spazi finitamente generati, ogni applicazione lineare può essere *rappresentata* da una matrice, purché si fissino basi in dominio e codominio.

Definizione – Matrice associata a un'applicazione lineare

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita, con $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, e siano fissate le basi

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}.$$

Per ogni $j = 1, \dots, n$, scriviamo l'immagine del j -esimo vettore di base come combinazione lineare della base di arrivo:

$$F(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{mj} w_m.$$

La matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ così definita si chiama *matrice associata ad F rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$* e si indica con $M_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}(F)$ oppure $A_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$.

Nota – Regola mnemonica

La j -esima **colonna** di A contiene le coordinate di $F(v_j)$ rispetto a $\mathcal{B}_W$. Dimensionalmente: A è di tipo $m \times n$ (righe = dimensione del codominio, colonne = dimensione del dominio). La base di arrivo dà le righe, quella di partenza le colonne.

Nota – Interpretazione

La matrice associata è la *matrice delle coordinate* delle immagini $F(v_1), \dots, F(v_n)$ rispetto alla base $\mathcal{B}_W$. Non va confusa con la matrice di passaggio, che richiede che i vettori in questione formino anch'essi una base.

3.1 Ricetta per costruire la matrice associata

1. Si calcolano le immagini $F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)$.
2. Ciascuna $F(v_j)$ viene scritta come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_m$, ottenendo i coefficienti $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$.
3. I coefficienti vengono disposti *in colonna*: la j -esima colonna di A è $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$.

Esercizio Svolto – Matrice associata con basi non canoniche

Sia $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $f(ax^2 + bx + c) = (a + 2b, c - a)$. Costruire la matrice associata rispetto alle basi

$$\mathcal{B}_V = \{x^2 - 1, 2x + 1, x^2 + 2\}, \quad \mathcal{B}_W = \{(2, 1), (3, 2)\}.$$

Soluzione. **Passo 1.** Calcoliamo le immagini dei vettori di $\mathcal{B}_V$ applicando la formula (con a, b, c coefficienti di x^2, x , termine noto):

$$\begin{aligned} f(x^2 - 1) &= (1 + 2 \cdot 0, -1 - 1) = (1, -2), \\ f(2x + 1) &= (0 + 2 \cdot 2, 1 - 0) = (4, 1), \\ f(x^2 + 2) &= (1 + 2 \cdot 0, 2 - 1) = (1, 1). \end{aligned}$$

Passo 2. Poiché $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$, la regola di Cramer per $\alpha(2, 1) + \beta(3, 2) = (y_1, y_2)$ dà

$$\alpha = 2y_1 - 3y_2, \quad \beta = -y_1 + 2y_2.$$

Applichiamo a ciascuna immagine:

$$\begin{aligned} (1, -2) : \alpha_1 &= 2(1) - 3(-2) = 8, & \beta_1 &= -1 + 2(-2) = -5. \\ (4, 1) : \alpha_2 &= 2(4) - 3(1) = 5, & \beta_2 &= -4 + 2(1) = -2. \\ (1, 1) : \alpha_3 &= 2(1) - 3(1) = -1, & \beta_3 &= -1 + 2(1) = 1. \end{aligned}$$

Passo 3. Disponendo i coefficienti in colonna si ottiene la matrice associata di tipo 2×3 :

$$A = M_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}(f) = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio Svolto – Matrice associata con basi canoniche

Riprendiamo $f(ax^2 + bx + c) = (a + 2b, c - a)$, ma ora usiamo le basi canoniche: $\mathcal{B}'_V = \{x^2, x, 1\}$ e $\mathcal{B}'_W = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Soluzione. Con la base canonica in arrivo, le coordinate di un vettore $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

sono esattamente $(y_1, y_2)^T$. Dunque basta calcolare le immagini e porle in colonna:

$$f(x^2) = (1, -1),$$

$$f(x) = (2, 0),$$

$$f(1) = (0, 1).$$

$$A' = M_{\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazione. $A \neq A'$: la matrice associata dipende dalla scelta delle basi.

3.2 Casi particolari notevoli

1. **Applicazione nulla.** Qualunque siano le basi scelte, la matrice associata è la matrice nulla di tipo $m \times n$: $M_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}(0_{V,W}) = \mathbf{0}_{m,n}$.
2. **Applicazione identica – stessa base in partenza e in arrivo.** $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{Id}_V) = I_n$ (matrice identità di ordine n).
3. **Applicazione identica – basi diverse.** Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi diverse di V , allora $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$ è la *matrice di passaggio* dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$ (le colonne sono le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$).
4. **Moltiplicazione a sinistra.** L'applicazione $F(X) = AX$ ($A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ fissata) ha come matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ la matrice A stessa. Questo giustifica la definizione di prodotto matrice-vettore.

4 Teorema di rappresentazione

Teorema – di rappresentazione

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita ($\dim V = n$, $\dim W = m$). Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, siano $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ basi fissate e sia $A = M_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}(F)$ la matrice associata. Per ogni $v \in V$ con vettore delle coordinate $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ rispetto a $\mathcal{B}_V$, le **coordinate di $F(v)$ rispetto a $\mathcal{B}_W$** sono date da:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}_W}(F(v)) = A \cdot X.$$

Dimostrazione

Si ha $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Per linearità:

$$\begin{aligned} F(v) &= x_1 F(v_1) + \dots + x_n F(v_n) \\ &= x_1 (a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m) + \dots + x_n (a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m) \\ &= (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n) w_1 + \dots + (a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n) w_m. \end{aligned}$$

I coefficienti di $w_1, \dots, w_m$ sono esattamente le componenti di AX , cioè le coordinate di $F(v)$ rispetto a $\mathcal{B}_W$. $\square$

Nota – Attenzione fondamentale

Il prodotto $A \cdot X$ **non restituisce il vettore** $F(v)$, ma le sue *coordinate* rispetto a $\mathcal{B}_W$. Solo se $\mathcal{B}_W$ è la base canonica le coordinate coincidono con il vettore.

Questo è l'errore più frequente: leggere le componenti di AX come il vettore finale invece che come coordinate da interpretare rispetto alla base in arrivo.

Esercizio Svolto – Applicazione del teorema di rappresentazione

Con i dati dell'Esercizio 3.1 e $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcoliamo $f(x^2 - x)$ tramite il Teorema 4.

Soluzione.

Passo 1 – Coordinate in partenza. Esprimiamo $x^2 - x$ rispetto a $\mathcal{B}_V = \{x^2 - 1, 2x + 1, x^2 + 2\}$, risolvendo $\lambda_1(x^2 - 1) + \lambda_2(2x + 1) + \lambda_3(x^2 + 2) = x^2 - x$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_2 = -1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Da $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ e dalla terza equazione $-\lambda_1 - \frac{1}{2} + 2\lambda_3 = 0$, combinando con $\lambda_1 + \lambda_3 = 1$ si ottiene $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$. Dunque $X = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$.

Passo 2 – Prodotto matrice-vettore.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} + 1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Passo 3 – Interpretazione. $(1, -1)^T$ sono le *coordinate* di $f(x^2 - x)$ rispetto a $\mathcal{B}_W = \{(2, 1), (3, 2)\}$:

$$f(x^2 - x) = 1 \cdot (2, 1) + (-1) \cdot (3, 2) = (2 - 3, 1 - 2) = (-1, -1).$$

Verifica diretta: $a = 1, b = -1, c = 0 \Rightarrow f(x^2 - x) = (1 + 2(-1), 0 - 1) = (-1, -1)$.
✓

Nota. Se la base di arrivo fosse stata la canonica, potremmo leggere $(1, -1)^T$ direttamente come vettore. Poiché non lo è, dobbiamo moltiplicare le coordinate per i vettori di $\mathcal{B}_W$.

5 Legge del cambiamento della matrice associata

Come varia la matrice associata quando si cambiano le basi?

Teorema – Legge del cambiamento della matrice associata

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $F : V \rightarrow W$ lineare. Siano $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}'_V$ due basi di V e $\mathcal{B}_W, \mathcal{B}'_W$ due basi di W . Siano

- $A = M_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}(F)$ – matrice associata rispetto alle prime basi,
- $A' = M_{\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W}(F)$ – matrice associata rispetto alle seconde basi,
- $M = P_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}'_V}$ – matrice di passaggio da $\mathcal{B}_V$ a $\mathcal{B}'_V$,
- $N = P_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}'_W}$ – matrice di passaggio da $\mathcal{B}_W$ a $\mathcal{B}'_W$.

Allora vale:

$$A' = N^{-1} \cdot A \cdot M.$$

Dimostrazione

[in termini di coordinate] Sia $v \in V$ con coordinate X' rispetto a $\mathcal{B}'_V$ e X rispetto a $\mathcal{B}_V$. Il cambiamento di base nel dominio dà $X = MX'$. Analogamente, per $w = F(v)$ con coordinate Y (in $\mathcal{B}_W$) e Y' (in $\mathcal{B}'_W$), si ha $Y = NY'$. Per il Teorema 4: $Y = AX$. Sostituendo:

$$NY' = AMX' \implies Y' = N^{-1}AMX'.$$

Poiché questo vale per ogni v , la matrice associata rispetto alle nuove basi è $A' = N^{-1}AM$. $\square$

Nota – Calcolo delle matrici di passaggio

Quando una delle due basi è la base canonica, la matrice di passaggio si calcola facilmente:

- **Da canonica a nuova base** $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$: si mettono i vettori di $\mathcal{B}'$ in colonna.
- **Da nuova base $\mathcal{B}'$ a canonica**: si prende l'inversa della matrice precedente.

6 Immagine di un'applicazione lineare

Definizione – Immagine

Data $F : V \rightarrow W$ lineare, si definisce l'*insieme immagine* di F come

$$\text{Im } F = \{w \in W \mid w = F(v) \text{ per qualche } v \in V\} = \{F(v) \mid v \in V\}.$$

Proposizione – ImF è un sottospazio

Sia $F : V \rightarrow W$ lineare. Allora $\text{Im } F$ è un sottospazio vettoriale di W .

Dimostrazione

Siano $w_1, w_2 \in \text{Im } F$: esistono $v_1, v_2 \in V$ con $w_i = F(v_i)$. Allora $w_1 + w_2 = F(v_1) + F(v_2) = F(v_1 + v_2) \in \text{Im } F$, e $\lambda w_1 = \lambda F(v_1) = F(\lambda v_1) \in \text{Im } F$. $\square$

Proposizione – Generatori dell'immagine

Siano V e W spazi vettoriali con V finitamente generato, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Allora:

$$\text{Im } F = \mathcal{L}(F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)).$$

In altre parole, le immagini dei vettori di base *generano* $\text{Im } F$. Analogamente, se $U = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_k)$, allora $F(U) = \mathcal{L}(F(u_1), \dots, F(u_k))$.

Nota – Dalla matrice alla dimensione dell'immagine

Se A è la matrice associata ad F rispetto a basi qualsiasi, allora

$$\text{rk } A = \dim \text{Im } F.$$

Inoltre, una base di $\text{Im } F$ si ottiene prendendo le immagini dei vettori di base del dominio corrispondenti a colonne di A che formano un minore non nullo di ordine massimo. In pratica: riduzione a scalini di A , poi le colonne pivot individuano i generatori di una base.

Esempi

1. L'immagine dell'applicazione nulla da V a W è $\{\mathbf{0}_W\}$.
2. L'immagine dell'applicazione identica su V è V stesso.
3. La derivazione $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ ha immagine $\mathcal{L}(3x^2, 2x, 1, 0) = \mathcal{L}(x^2, x, 1) = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Si noti che $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato, eppure l'immagine ha dimensione finita 3 — questo è garantito dalla finitezza del dominio.

7 Controimmagine e nucleo

7.1 Controimmagine

Definizione – Controimmagine

Data $F : V \rightarrow W$ e un sottoinsieme $B \subseteq W$, la *controimmagine* (o *preimmagine*) di B secondo F è

$$F^{-1}(B) = \{v \in V \mid F(v) \in B\}.$$

In modo pittoresco: sono gli “arcieri” del dominio che hanno colpito qualche bersaglio di B .

Nota – Calcolare la controimmagine è risolvere un sistema

Per un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, calcolare $F^{-1}(\{b\})$ significa trovare tutti i $v \in \mathbb{R}^n$ con $F(v) = b$, cioè risolvere il sistema lineare $Ax = b$. I sistemi lineari sono dunque lo strumento naturale per calcolare controimmagini.

In particolare:

- la controimmagine di un singolo vettore può essere vuota (nessuna soluzione), un singleton (soluzione unica), o un sottospazio affine di dimensione ≥ 1 (infinita soluzioni);
- *non* può avere esattamente due elementi, perché i sistemi lineari non ammettono tale cardinalità.

7.2 Nucleo

Definizione – Nucleo

Data $F : V \rightarrow W$ lineare, il *nucleo* (o *kernel*) di F è la controimmagine del vettore nullo di W :

$$\text{Ker } F = F^{-1}(\{\mathbf{0}_W\}) = \{v \in V \mid F(v) = \mathbf{0}_W\}.$$

Il termine *kernel* deriva dal greco “nucleo” (lo stesso prefisso di *procarioti* e *eucarioti* in biologia).

Proposizione – KerF è un sottospazio

Sia $F : V \rightarrow W$ lineare. Allora $\text{Ker } F$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione

Vettore nullo. $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ per linearità, quindi $\mathbf{0}_V \in \text{Ker } F$.

Chiusura per somma. Siano $v_1, v_2 \in \text{Ker } F$: allora $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$, quindi $v_1 + v_2 \in \text{Ker } F$.

Chiusura per scalare. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \text{Ker } F$: allora $F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$, quindi $\lambda v \in \text{Ker } F$. $\square$

Nota – Iniettività e nucleo

Il nucleo misura la “non-iniettività” di F : più è grande $\text{Ker } F$, più F “ripete” le stesse immagini. In modo preciso:

Proposizione – Criterio di iniettività

$F : V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo se $\text{Ker } F = \{\mathbf{0}_V\}$.

Dimostrazione

$(\Rightarrow)$ Sia F iniettiva e sia $v \in \text{Ker } F$: allora $F(v) = \mathbf{0}_W = F(\mathbf{0}_V)$. Per iniettività, $v = \mathbf{0}_V$.

$(\Leftarrow)$ Supponiamo $\text{Ker } F = \{\mathbf{0}_V\}$. Siano v_1, v_2 tali che $F(v_1) = F(v_2)$: allora $F(v_1 - v_2) = \mathbf{0}_W$, quindi $v_1 - v_2 \in \text{Ker } F = \{\mathbf{0}_V\}$, cioè $v_1 = v_2$. $\square$

8 Teorema del rango

Teorema – del rango (rank-nullity theorem)

Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare con V finitamente generato. Allora:

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} F + \dim \operatorname{Ker} F.$$

Nota – Dimostrazione tramite la matrice associata

Fissate basi opportune su V e W (entrambi finitamente generati), sia A la matrice associata ad F . Dalla teoria del rango delle matrici sappiamo che

$$\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} F \quad \text{e} \quad \operatorname{rk} A + \dim \operatorname{Ker} F = \dim V$$

(il secondo è il teorema di Rouché–Capelli applicato al sistema $Ax = 0$, dove $\dim \operatorname{Ker} F$ è il numero di parametri liberi). Combinando le due si ottiene il teorema del rango.

Nota – Interpretazione geometrica

Il teorema afferma che $\dim V$ è *costante*: quanto più è grande il nucleo (l'applicazione “ripete” molto), tanto più piccola è l'immagine. I due casi estremi sono:

- **Applicazione identica:** $\operatorname{Ker} = \{0\}$, $\operatorname{Im} = V$ (massimo di iniettività).
- **Applicazione nulla:** $\operatorname{Ker} = V$, $\operatorname{Im} = \{0\}$ (massimo di non-iniettività).

8.1 Criteri di iniettività e suriettività

Proposizione – Criteri dimensionali

Sia $F : V \rightarrow W$ con V e W finitamente generati, e sia A la matrice associata ad F . Allora:

- (1) F è **suriettiva** $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} F = \dim W \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \dim W$.
- (2) F è **iniettiva** $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} F = \dim V \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \dim V \Leftrightarrow \operatorname{Ker} F = \{0_V\}$.
- (3) F è **biiettiva** $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} F = \dim V = \dim W \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \dim V = \dim W$.

Dimostrazione

- (1) $\operatorname{Im} F$ è un sottospazio di W ; un sottospazio ha la stessa dimensione dello spazio se e solo se coincide con esso.
- (2) Per il teorema del rango, $\dim \operatorname{Im} F = \dim V \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} F = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} F = \{0_V\}$, il che è equivalente all'iniettività (Proposizione 7.2).
- (3) Unione di (1) e (2). □

Teorema – Conseguenza dimensionale immediata

Sia $F : V \rightarrow W$ con V e W finitamente generati.

- (1) Se $\dim V > \dim W$, allora F non può essere iniettiva.
- (2) Se $\dim V < \dim W$, allora F non può essere suriettiva.
- (3) Se $\dim V = \dim W$, allora F è iniettiva $\Leftrightarrow F$ è suriettiva $\Leftrightarrow F$ è biiettiva.

Dimostrazione

- (1) Dal teorema del rango, $\dim \operatorname{Im} F = \dim V - \dim \operatorname{Ker} F \leq \dim V$. Se $\dim V > \dim W$, allora $\dim \operatorname{Ker} F \geq \dim V - \dim W > 0$, quindi $\operatorname{Ker} F \neq \{\mathbf{0}_V\}$ e F non è iniettiva.
- (2) $\operatorname{Im} F$ è un sottospazio di W , quindi $\dim \operatorname{Im} F \leq \dim V < \dim W$: $\operatorname{Im} F$ non può coincidere con W .
- (3) Supponiamo $\dim V = \dim W = n$. Se F è iniettiva, $\dim \operatorname{Ker} F = 0$, quindi per il teorema del rango $\dim \operatorname{Im} F = n = \dim W$, cioè F è suriettiva. Viceversa, se F è suriettiva, $\dim \operatorname{Im} F = n$, quindi $\dim \operatorname{Ker} F = 0$ e F è iniettiva. $\square$

Nota – Come usare questo teorema all'esame

Basta confrontare le dimensioni di dominio e codominio *senza fare calcoli*. Ad esempio: qualsiasi applicazione lineare da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^2$ non è iniettiva (per il punto 1); qualsiasi lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^5$ non è suriettiva (punto 2).

Esercizio Svolto – Calcolo di nucleo e immagine

Sia $F : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definita da

$$F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + (b - 3a)x + (2d - c).$$

Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

Soluzione.

Immagine. Usiamo la base canonica di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= x^2 - 3x, & F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= x, \\ F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= -1, & F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 2. \end{aligned}$$

I generatori di $\operatorname{Im} F$ sono quindi $\{x^2 - 3x, x, -1, 2\}$. Il polinomio 2 è multiplo di -1 , quindi è ridondante. Tra i rimanenti $\{x^2 - 3x, x, -1\}$, poiché -1 ha grado 0, x ha grado 1 e $x^2 - 3x$ ha grado 2, sono linearmente indipendenti. Dunque:

$$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}(x^2 - 3x, x, -1), \quad \dim \operatorname{Im} F = 3.$$

Nucleo. Per il teorema del rango: $\dim \operatorname{Ker} F = \dim \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Im} F = 4 - 3 = 1$.

Calcoliamo esplicitamente: $F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$ richiede $a = 0$, $b - 3a = 0$, $2d - c = 0$,
cioè $a = 0$, $b = 0$, $c = 2d$. Parametrizzando con $d = t$:

$$\text{Ker } F = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad \dim \text{Ker } F = 1. \quad \checkmark$$

9 Isomorfismi

Definizione – Isomorfismo e spazi isomorfi

Un'applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ biettiva si chiama *isomorfismo*. Due spazi vettoriali V e W si dicono *isomorfi* ($V \cong W$) se esiste un isomorfismo da V a W . Vengono usati anche i termini:

- *monomorfismo* (da $\mu\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ = “uno”) per applicazione lineare *iniettiva*;
- *epimorfismo* (da $\acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}$ = “sopra”) per applicazione lineare *suriettiva*;
- *endomorfismo* per applicazione lineare $F : V \rightarrow V$ (da e a sé stesso);
- *automorfismo* per isomorfismo $F : V \rightarrow V$.

Teorema – Spazi isomorfi e dimensione

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita. Allora:

$$V \cong W \quad \Leftrightarrow \quad \dim V = \dim W.$$

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Se $F : V \rightarrow W$ è un isomorfismo, è iniettiva e suriettiva. Per la Proposizione 8.1, $\dim \text{Im } F = \dim V = \dim W$.

($\Leftarrow$) Supponiamo $\dim V = \dim W = n$. Scegliamo basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_n\}$ di W . Per il Teorema 2 esiste un'unica applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ tale che $F(v_i) = w_i$ per ogni i . La matrice associata ad F rispetto a queste basi è la matrice identica I_n , che ha rango $n = \dim W$: per la Proposizione 8.1, F è biettiva, dunque è un isomorfismo. $\square$

Nota – Conseguenza fondamentale

Ogni spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$ è isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Gli spazi isomorfi sono strutturalmente identici: le operazioni vettoriali funzionano allo stesso modo, cambia solo la “rappresentazione”. Esempi:

$$\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \cong \mathbb{R}^3, \quad \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) : \text{tr } A = 0\} \cong \mathbb{R}^3.$$

10 Composizione di applicazioni lineari

Definizione – Composta

Date $F : V \rightarrow U$ e $G : U \rightarrow W$ applicazioni lineari, la loro *composta* è

$$G \circ F : V \rightarrow W, \quad (G \circ F)(v) = G(F(v)).$$

La composizione di due applicazioni lineari è ancora lineare (verifica immediata).

Teorema – Legge di composizione operatoria

Siano V, U, W spazi vettoriali di dimensione finita, con basi fissate $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W$. Siano $F : V \rightarrow U$ e $G : U \rightarrow W$ applicazioni lineari con matrici associate

$$B = M_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U}(F), \quad A = M_{\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W}(G).$$

Allora la matrice associata a $G \circ F$ rispetto a $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ è:

$$M_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}(G \circ F) = A \cdot B.$$

Nota – Perché il prodotto riga-per-colonna

Questo teorema spiega l'unica ragione per cui il prodotto tra matrici è definito come moltiplicazione riga-per-colonna: è la scelta che fa funzionare la composizione. Se il prodotto fosse definito diversamente, la formula $M(G \circ F) = M(G) \cdot M(F)$ non varrebbe.

Dimostrazione

[sketch] Per un generico $v \in V$ con coordinate X rispetto a $\mathcal{B}_V$, il teorema di rappresentazione dà: $\mathcal{C}(F(v)) = BX$ rispetto a $\mathcal{B}_U$, e poi $\mathcal{C}(G(F(v))) = A(BX) = (AB)X$ rispetto a $\mathcal{B}_W$. La matrice che moltiplica X per ottenere le coordinate di $(G \circ F)(v)$ è dunque AB . $\square$

Esercizio Svolto – Verifica della legge di composizione

In $\mathbb{R}^2$ con basi canoniche, siano $F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ e $G(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ con matrici

$$M(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M(G) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

La composta $(G \circ F)(x, y) = G(ax + by, cx + dy)$ vale:

$$(G \circ F)(x, y) = ((\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)y, (\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)y).$$

La matrice di $G \circ F$ rispetto alle coordinate è:

$$M(G \circ F) = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M(G) \cdot M(F). \quad \checkmark$$

10.1 Applicazioni invertibili e matrice inversa

Definizione – Applicazione invertibile

$F : V \rightarrow W$ è *invertibile* se esiste $G : W \rightarrow V$ (l'*inversa*) tale che $G \circ F = \text{Id}_V$ e $F \circ G = \text{Id}_W$. Si scrive $G = F^{-1}$.

F è invertibile se e solo se è biiettiva (cioè un isomorfismo). Di conseguenza: F è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ per la matrice associata A quadrata.

Proposizione – Matrice dell'inversa

Se $F : V \rightarrow W$ è invertibile e A è la sua matrice associata rispetto a basi fissate, allora la matrice associata a F^{-1} (rispetto alle stesse basi, scambiate) è A^{-1} .

Dimostrazione

Per il Teorema 10, $M(F^{-1} \circ F) = M(F^{-1}) \cdot A$. Ma $F^{-1} \circ F = \text{Id}_V$ ha matrice I_n , quindi $M(F^{-1}) \cdot A = I_n$, cioè $M(F^{-1}) = A^{-1}$. $\square$

Nota – Origine del nome “matrice inversa”

La Proposizione 10.1 spiega il nome: la matrice inversa è proprio la matrice associata all'applicazione inversa. Non si tratta di una coincidenza terminologica, ma di una corrispondenza profonda tra le strutture algebriche.

Proposizione – Proprietà della composizione

Le applicazioni lineari soddisfano le seguenti proprietà:

- (1) La composizione è **associativa**: $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$.
- (2) La composizione **non** è in generale commutativa: $G \circ F \neq F \circ G$.
- (3) Se F_1 e F_2 sono invertibili (e componibili), allora $(F_1 \circ F_2)^{-1} = F_2^{-1} \circ F_1^{-1}$.

Teorema – di Sylvester sul rango del prodotto

Siano $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Allora:

$$\text{rk}(AB) \leq \min(\text{rk } A, \text{rk } B).$$

In particolare, se $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile, allora $\text{rk}(CA) = \text{rk}(AC) = \text{rk } A$: moltiplicare per una matrice invertibile non cambia il rango.

Nota – Tutte le matrici associate hanno lo stesso rango

Per la legge del cambiamento $A' = N^{-1}AM$ (Teorema 5), e poiché M e N sono matrici di passaggio (dunque invertibili), il Teorema 10.1 garantisce $\text{rk } A' = \text{rk } A$. Pertanto il rango non dipende dalla scelta delle basi: è un invariante dell'applicazione lineare F .