

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 12: Diagonalizzazione di endomorfismi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Endomorfismi e similitudine · Autovalori e autovettori · Polinomio
caratteristico · Criteri di diagonalizzabilità · Diagonalizzazione di matrici

Indice

1	Endomorfismi e similitudine	1
2	Autovalori e autovettori	2
3	Polinomio caratteristico	4
4	Criteri di diagonalizzabilità	6
5	Diagonalizzazione di matrici	8
	Esercizi svolti	9

1 Endomorfismi e similitudine

Affronteremo nel presente capitolo la diagonalizzazione degli endomorfismi di uno spazio vettoriale. Lo studio delle trasformazioni geometriche, la resistenza dei corpi rigidi, la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie si riconducono a questioni di diagonalizzazione.

Supporremo di lavorare con uno spazio vettoriale V finitamente generato di dimensione n . Ricordiamo alcuni fatti fondamentali sugli endomorfismi. Quando dominio e codominio di un'applicazione lineare $F : V \rightarrow V$ coincidono, diciamo che F è un *endomorfismo* di V . Fissata una base $\mathcal{B}$ di V , si associa a F la matrice $M_{\mathcal{B}}(F)$ usando la stessa base in partenza e in arrivo; la scriviamo più brevemente $M_{\mathcal{B}}(F)$. Se $\mathcal{B}'$ è un'altra base, la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'}(F)$ e la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(F)$ sono legate dalla *relazione di similitudine*

$$A' = C^{-1}AC,$$

dove $C = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. In particolare, tutte le matrici associate a uno stesso endomorfismo sono simili tra loro.

Definizione – Similitudine

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Diremo che A e B sono *simili* se esiste una matrice invertibile $C \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $B = C^{-1}AC$.

Proposizione – Invarianti della similitudine

Siano A e B matrici simili. Allora:

- (i) $\text{rk } A = \text{rk } B$;
- (ii) $\det A = \det B$.

Dimostrazione

Se $B = C^{-1}AC$, per il Corollario 11.55 si ha $\text{rk } A = \text{rk } B$. Per il Teorema di Binet $\det B = \det(C^{-1}) \det A \det C = \det A$, poiché $\det C \cdot \det C^{-1} = 1$. $\square$

Ne segue che matrici associate a uno stesso endomorfismo hanno lo stesso rango e lo stesso determinante. Un endomorfismo F è detto *automorfismo* se è invertibile, cioè se una (e quindi tutte) le sue matrici associate sono invertibili.

Definizione – Endomorfismo diagonalizzabile

Diremo che un endomorfismo $F : V \rightarrow V$ è *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la matrice $M_{\mathcal{B}}(F)$ è diagonale. In tal caso, $\mathcal{B}$ si chiama *base diagonalizzante* per F e si indica con $\mathcal{B}_{\text{diag}}$.

L'identità $\text{id} : V \rightarrow V$ e l'applicazione nulla sono diagonalizzabili perché, rispetto a qualsiasi base, hanno come matrice associata rispettivamente I_n e 0 , che sono diagonali.

2 Autovalori e autovettori

Definizione – Autovalore e autovettore

Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Diremo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un *autovalore* di F se esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che

$$F(v) = \lambda v.$$

In tal caso, v è detto *autovettore* di F associato all'autovalore λ .

Nota – Il vettore nullo non è autovettore

Il vettore nullo viene escluso dalla definizione di autovettore per ragioni teoriche: $F(\mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0}$ vale per qualsiasi λ , rendendo la teoria priva di significato. In ogni risultato riguardante autovettori, la condizione $v \neq \mathbf{0}$ è implicita e va sempre verificata.

La parola *auto* (dal greco: “se stesso”) è appropriata: tutti i vettori sulla retta $\mathcal{L}(v)$ generata da un autovettore v vengono lasciati da F sulla stessa retta, poiché $F(av) = a\lambda v = \lambda(av)$. Queste rette si chiamano *autodirezioni* di F . In tedesco si dice *eigen*, in inglese si parla di *eigenvector* ed *eigenvalue*.

Esempi.

- (1) **Applicazione identica.** Ogni vettore non nullo è autovettore di $\text{id} : V \rightarrow V$ associato all'autovalore $\lambda = 1$.
- (2) **Applicazione nulla.** Ogni vettore non nullo è autovettore di $\mathbf{0} : V \rightarrow V$ associato all'autovalore $\lambda = 0$.
- (3) **Simmetria assiale rispetto all'asse x .** L'endomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da $F(x, y) = (x, -y)$ ammette:
 - l'asse x come autodirezione: ogni vettore $(x, 0)$ soddisfa $F(x, 0) = (x, 0) = 1 \cdot (x, 0)$, quindi $\lambda = 1$;
 - l'asse y come autodirezione: ogni vettore $(0, y)$ soddisfa $F(0, y) = (0, -y) = (-1) \cdot (0, y)$, quindi $\lambda = -1$.

La base canonica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ è una base diagonalizzante, con matrice associata $\text{diag}(1, -1)$.

Il teorema seguente è il risultato fondamentale del capitolo: riduce il problema — computazionalmente inaffrontabile — della ricerca di basi diagonalizzanti al problema risolvibile con l'algebra lineare della ricerca di autovettori.

Teorema – Basi diagonalizzanti e basi di autovettori

Un endomorfismo $F : V \rightarrow V$ è diagonalizzabile se e solo se V ammette una base costituita da autovettori di F .

Dimostrazione

Sia $n = \dim V$. Se F è diagonalizzabile, esiste una base $\mathcal{B}_{\text{diag}} = \{v_1, \dots, v_n\}$ con

$$M_{\mathcal{B}_{\text{diag}}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Per definizione di matrice associata, la i -esima colonna contiene le coordinate di $F(v_i)$, quindi $F(v_i) = \lambda_i v_i$ per ogni i : ogni elemento della base è autovettore. Viceversa, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di autovettori con $F(v_i) = \lambda_i v_i$, la matrice associata rispetto a tale base è $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, che è diagonale. $\square$

Nota

Le basi diagonalizzanti e le basi di autovettori sono la stessa cosa, viste da prospettive diverse. L'utilità del teorema sta nel fatto che cercare autovettori si riduce a risolvere sistemi lineari omogenei.

Definizione – Autospazio

Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo e sia λ un autovalore di F . Si chiama *autospazio associato a λ* l'insieme

$$E(\lambda) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \text{Ker}(F - \lambda \text{id}).$$

Nella definizione si include il vettore nullo (a differenza della nozione di autovettore): così $E(\lambda)$ è automaticamente chiuso rispetto alle operazioni e ne facciamo un sottospazio.

Proposizione – L'autospazio è un sottospazio

Sia λ un autovalore di F . Allora $E(\lambda)$ è un sottospazio vettoriale di V , con $\dim E(\lambda) \geq 1$.

Dimostrazione

La chiusura rispetto alla somma: se $F(v) = \lambda v$ e $F(w) = \lambda w$, allora $F(v + w) = F(v) + F(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w)$. La chiusura rispetto al prodotto per scalare: $F(av) = aF(v) = a\lambda v = \lambda(av)$. Poiché λ è autovalore, esiste almeno un autovettore non nullo in $E(\lambda)$, da cui $\dim E(\lambda) \geq 1$. $\square$

Proposizione – Autovettori per autovalori distinti sono indipendenti

Siano λ e μ autovalori distinti di F , e siano v, w autovettori associati rispettivamente a λ e μ . Allora v e w sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione

Supponiamo $av + bw = \mathbf{0}$. Applicando F : $a\lambda v + b\mu w = \mathbf{0}$. Moltiplicando la relazione iniziale per λ e sottraendo: $b(\mu - \lambda)w = \mathbf{0}$. Poiché $w \neq \mathbf{0}$ e $\mu \neq \lambda$, si deduce $b = 0$, e quindi $a = 0$. $\square$

Proposizione – Al più n autovalori

Un endomorfismo $F : V \rightarrow V$ con $\dim V = n$ ha al più n autovalori distinti.

Dimostrazione

Ad autovalori distinti corrispondono autovettori linearmente indipendenti (Proposizione 2). In uno spazio di dimensione n non possono esistere più di n vettori linearmente indipendenti (Lemma di Steinitz). $\square$

Proposizione – L'autovalore nullo e il nucleo

Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Allora $\lambda = 0$ è autovalore di F se e solo se F non è invertibile. In tal caso $E(0) = \text{Ker } F$.

Dimostrazione

$\lambda = 0$ è autovalore $\iff$ esiste $v \neq \mathbf{0}$ con $F(v) = \mathbf{0} \iff \text{Ker } F \neq \{\mathbf{0}\} \iff F$ non è iniettiva $\iff F$ non è invertibile (poiché $\dim V < \infty$). La seconda parte segue dalla definizione: $E(0) = \{v : F(v) = 0 \cdot v = \mathbf{0}\} = \text{Ker } F$. $\square$

3 Polinomio caratteristico

Per determinare autovalori e autovettori in modo algoritmico, fissiamo una base $\mathcal{B}$ di V e scriviamo $A = M_{\mathcal{B}}(F)$. La condizione $F(v) = \lambda v$ diventa in coordinate $AX = \lambda X$, ovvero

$$(A - \lambda I_n)X = \mathbf{0}.$$

Questo è un sistema lineare omogeneo quadrato. Per ammettere soluzioni non nulle (che corrispondono agli autovettori), per il Teorema di Cramer il determinante della matrice dei coefficienti deve annullarsi.

Definizione – Equazione secolare e polinomio caratteristico

La matrice $A_{\lambda} := A - \lambda I_n$ si chiama *matrice caratteristica*. L'equazione

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

si chiama *equazione secolare* (introdotta nel XVIII secolo per lo studio dei moti millenari dei pianeti). Il polinomio

$$p_F(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

si chiama *polinomio caratteristico* di F calcolato rispetto ad A . Le **radici reali** di p_F sono esattamente gli autovalori di F .

Nota – Proprietà del polinomio caratteristico

Per ogni endomorfismo F di uno spazio di dimensione n :

- (i) $p_F(\lambda)$ ha sempre grado n ;
- (ii) il coefficiente direttore (del termine λ^n) è $(-1)^n$;
- (iii) il termine noto è $p_F(0) = \det(A)$.

Quest'ultima proprietà è utile come verifica: se si è calcolato $p_F(\lambda)$ e il termine noto non coincide con $\det(A)$, c'è sicuramente un errore.

Il teorema seguente giustifica il fatto che il polinomio caratteristico sia ben definito per un endomorfismo, indipendentemente dalla base scelta.

Teorema – Invarianza del polinomio caratteristico per similitudine

Il polinomio caratteristico di un endomorfismo non dipende dalla matrice associata scelta per calcolarlo. Equivalentemente, matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Dimostrazione

Siano A ed $A' = C^{-1}AC$ due matrici associate a F . Allora

$$\begin{aligned}\det(A' - \lambda I_n) &= \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}I_n C) = \det(C^{-1}(A - \lambda I_n)C) \\ &= \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det C = \det(A - \lambda I_n),\end{aligned}$$

dove si è usato che $\det C \cdot \det C^{-1} = 1$. □

Nota – Attenzione: Gauss non conserva il polinomio caratteristico

Le operazioni elementari di riga (riduzione di Gauss) non sono operazioni di similitudine: producono matrici *equivalenti per riga*, non simili. Di conseguenza, **non si deve usare la riduzione di Gauss** per calcolare il polinomio caratteristico. Ad esempio, scambiando le righe di $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, la quale ha polinomio caratteristico $(\lambda + 2)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 4$, mentre $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4$ (che non ha radici reali). Nei calcoli gli autovalori vanno cercati tramite il determinante $\det(A - \lambda I)$.

Esempi. Calcoliamo il polinomio caratteristico in alcuni casi significativi.

(1) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + y, y)$. La matrice associata alla base canonica è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2.$$

L'unico autovalore è $\lambda = 1$. Per trovare $E(1)$ si risolve $(A - I)X = \mathbf{0}$: la matrice $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ impone $y = 0$, quindi $E(1) = \mathcal{L}((1, 0))$.

(2) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (2y, -2x)$. La matrice è $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4.$$

Il polinomio non ha radici reali: F non ammette autovalori reali e non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Su $\mathbb{C}$ gli autovalori sono $\pm 2i$.

(3) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (2x - y - z, -2y, -2z)$. La matrice è $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Essendo triangolare, gli autovalori si leggono sulla diagonale:

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)(-2 - \lambda)^2,$$

dunque $\lambda = 2$ (semplice) e $\lambda = -2$ (doppio). Per il calcolo degli autospazi, dopo aver verificato che $E(2) = \mathcal{L}((1, 0, 0))$, si trova $E(-2) = \mathcal{L}((1, 0, 4), (0, 1, -1))$.

4 Criteri di diagonalizzabilità

Definizione – Molteplicità algebrica e geometrica

Sia λ_0 un autovalore di F . Si chiama:

- **molteplicità algebrica** di λ_0 , indicata con $\text{m.a.}(\lambda_0)$, la molteplicità di λ_0 come radice del polinomio caratteristico p_F ;
- **molteplicità geometrica** di λ_0 , indicata con $\text{m.g.}(\lambda_0)$, la dimensione dell'autospazio $E(\lambda_0)$:

$$\text{m.g.}(\lambda_0) = \dim E(\lambda_0) = n - \text{rk}(A - \lambda_0 I_n).$$

Nota – Somma delle molteplicità algebriche

Poiché il polinomio caratteristico ha grado n , se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori reali distinti di F , si ha

$$\text{m.a.}(\lambda_1) + \dots + \text{m.a.}(\lambda_k) \leq n,$$

con l'uguaglianza se e solo se p_F si fattorizza completamente in fattori lineari su $\mathbb{R}$ (cioè tutti gli autovalori sono reali, eventualmente ripetuti).

Proposizione – Condizione necessaria di diagonalizzabilità

Se $F : V \rightarrow V$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, allora tutti i suoi autovalori sono reali.

Dimostrazione

Se F è diagonalizzabile, la matrice diagonale $D = M_{\mathcal{B}_{\text{diag}}}(F)$ ha il polinomio caratteristico $p_F(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ che si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$: tutte le radici sono reali. $\square$

Proposizione – Relazione tra molteplicità algebrica e geometrica

Per ogni autovalore λ_0 di F vale

$$1 \leq \text{m.g.}(\lambda_0) \leq \text{m.a.}(\lambda_0).$$

La disuguaglianza sinistra segue dalla Proposizione 2; la destra è la parte più delicata e si dimostra con un argomento di completamento di base e sviluppo di Laplace sul determinante (si veda il testo).

Proposizione – Condizione sufficiente: autovalori distinti

Se $F : V \rightarrow V$ ha $n = \dim V$ autovalori reali e distinti, allora F è diagonalizzabile.

Dimostrazione

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli n autovalori distinti e $v_1, \dots, v_n$ corrispondenti autovettori. Per la Proposizione 2, applicata ripetutamente, questi sono linearmente indipendenti: formano quindi una base di V di autovettori, e F è diagonalizzabile per il Teorema 2. $\square$

Nota

La condizione è solo sufficiente: esistono endomorfismi diagonalizzabili con autovalori non tutti distinti (ad esempio l'identità, con l'unico autovalore 1 ripetuto n volte). La condizione necessaria e sufficiente è data dal Teorema 4.

Proposizione – AutospaZI in somma diretta

Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti. Allora gli autospaZI $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_k)$ sono in somma diretta. In particolare, F è diagonalizzabile se e solo se

$$V = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_k).$$

Dimostrazione

Per la Proposizione 2, autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Siano $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ basi degli autospaZI rispettivi: unendo questi insiemi si ottiene un insieme di vettori linearmente indipendenti (si applica la Proposizione 10.30 del testo). La somma ha quindi dimensione $\sum_i \dim E(\lambda_i)$, ed è diretta. La diagonalizzabilità di F equivale a poter costruire una base di V formata da autovettori, il che accade esattamente quando la somma diretta degli autospaZI esaurisce V . $\square$

Teorema – Criterio necessario e sufficiente di diagonalizzabilità

Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo con $\dim V = n$. Allora F è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se valgono entrambe le seguenti condizioni:

- (i) tutti gli autovalori di F sono reali;
- (ii) per ogni autovalore λ di F si ha $m.g.(\lambda) = m.a.(\lambda)$.

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Se F è diagonalizzabile, la condizione (i) segue dalla Proposizione 4. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti con molteplicità algebriche $r_1, \dots, r_k$ (con $r_1 + \dots + r_k = n$). Dalla Proposizione 4, $V = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_k)$, quindi $\sum_i \text{m.g.}(\lambda_i) = n = \sum_i r_i$. Poiché $\text{m.g.}(\lambda_i) \leq r_i$ per ogni i (Proposizione 4), deve essere $\text{m.g.}(\lambda_i) = r_i$ per ogni i .

($\Leftarrow$) Se valgono (i) e (ii), la somma delle molteplicità algebriche è n , e per ipotesi coincide con la somma delle molteplicità geometriche: $\sum_i \text{m.g.}(\lambda_i) = n$. Per la Proposizione 4 la somma diretta degli autospazi ha dimensione n e coincide con V . $\square$

Proposizione – Corollario: somma delle molteplicità geometriche

Sia $F : V \rightarrow V$ un endomorfismo con autovalori reali. Allora F è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori vale n .

Nota – Metodo pratico

Per stabilire se F è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$:

1. Calcolare $p_F(\lambda) = \det(A - \lambda I)$;
2. verificare che tutte le radici siano reali;
3. per ciascun autovalore λ_i di molteplicità algebrica $r_i > 1$, calcolare $\text{m.g.}(\lambda_i) = n - \text{rk}(A - \lambda_i I)$ e verificare che sia uguale a r_i .

Se anche un solo autovalore ha $\text{m.g.} < \text{m.a.}$, l'endomorfismo *non* è diagonalizzabile.

5 Diagonalizzazione di matrici

Le definizioni e i risultati ottenuti per gli endomorfismi si formulano direttamente per le matrici quadrate. Data $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'applicazione canonica $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L_A(X) = AX$, è un endomorfismo. Autovalori, autovettori, autospazi e polinomio caratteristico di A si definiscono come quelli di L_A e si calcolano direttamente dalla matrice A .

Definizione – Matrice diagonalizzabile

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è detta *diagonalizzabile* se l'endomorfismo L_A è diagonalizzabile, ovvero se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A .

Teorema – Diagonalizzazione delle matrici quadrate

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se e solo se è simile a una matrice diagonale, ossia se esistono una matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e una matrice invertibile $C \in GL_n(\mathbb{R})$ tali che

$$D = C^{-1}AC.$$

Dimostrazione

Per il Teorema 2, A è diagonalizzabile se e solo se $\mathbb{R}^n$ ammette una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di autovettori di L_A , con $Av_i = \lambda_i v_i$. Sia C la matrice che ha per colonne ordinatamente $v_1, \dots, v_n$: essa è la matrice di passaggio dalla base canonica a questa base di autovettori. La matrice di L_A rispetto alla base di autovettori è allora $C^{-1}AC = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, diagonale. Viceversa, se esiste tale C invertibile, le sue colonne sono autovettori di A e formano una base di $\mathbb{R}^n$. $\square$

Nota – Come costruire C e D

Per costruire esplicitamente le matrici C e D :

- $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ha sulla diagonale gli autovalori di A , ciascuno ripetuto tante volte quanti autovettori indipendenti vengono estratti dal suo autospazio;
- C si costruisce mettendo in colonna, *in ordine corrispondente*, gli autovettori associati a ciascun λ_i . L'ordine delle colonne di C deve corrispondere all'ordine degli autovalori sulla diagonale di D .

Proposizione – Determinante e autovalori

Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile, allora $\det A$ è uguale al prodotto dei suoi autovalori (contati con molteplicità). In particolare, A è singolare se e solo se $\lambda = 0$ è un autovalore di A .

Esercizi svolti

Esercizio Svolto 1

Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (x + z, x + z, x + z)$. Studiare la diagonalizzabilità di F senza calcolare il polinomio caratteristico.

Soluzione. La matrice associata alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché tutte le righe sono uguali, $\text{rk } A = 1$, dunque $\dim \text{Ker } A = 3 - 1 = 2$.

Autovalore $\lambda = 0$. Poiché F non è invertibile (la prima e la terza colonna sono uguali, quindi $\text{rk } A < 3$), per la Proposizione 2 $\lambda = 0$ è autovalore con $E(0) = \text{Ker } A$. La dimensione è m.g.(0) = 2. Due autovettori indipendenti nel nucleo si trovano osservando che le colonne 1 e 3 di A sono uguali, quindi $e_1 - e_3 = (1, 0, -1)^T$ sta nel nucleo; analogamente, $e_2 = (0, 1, 0)^T$ ha immagine $Ae_2 = \mathbf{0}$. Quindi $E(0) = \mathcal{L}((1, 0, -1), (0, 1, 0))$.

Autovalore non nullo. Il polinomio caratteristico ha grado 3 e ha già $\lambda = 0$ come radice doppia (m.a.(0) ≥ 2); il terzo autovalore deve essere reale (i complessi compaiono in coppie coniugate). Per trovarlo si osserva che la somma delle colonne

di A dà $(3, 3, 3)^T = 3(1, 1, 1)^T$, quindi $F(e_1 + e_2 + e_3) = F(1, 1, 1) = (2, 2, 2) = 2 \cdot (1, 1, 1)$. Perciò $v = (1, 1, 1)^T$ è autovettore con $\lambda = 2$.

Molteplicità. Poiché $\text{m.g.}(0) = 2$ e $\text{m.g.}(2) = 1$, e la somma vale $3 = \dim \mathbb{R}^3$, per il Corollario 4 si ha necessariamente $\text{m.a.}(0) = 2$ e $\text{m.a.}(2) = 1$. Le molteplicità algebriche e geometriche coincidono per tutti gli autovalori: F è **diagonalizzabile**.

Base di autovettori e polinomio caratteristico. Una base di autovettori è $\mathcal{B}_{\text{diag}} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, con autovalori $0, 0, 2$. Per similitudine, il polinomio caratteristico è $p_F(\lambda) = \lambda^2(2 - \lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)$.

Esercizio Svolto 2

Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definito da

$$F(ax^2 + bx + c) = (2a - b + c)x^2 + (3b - c)x + (2a + b + 3c).$$

Determinare se F è diagonalizzabile.

Soluzione. Calcoliamo le immagini della base canonica $\{x^2, x, 1\}$:

$$F(x^2) = 2x^2 + 0 \cdot x + 2 \rightarrow \text{coordinate } (2, 0, 2),$$

$$F(x) = -x^2 + 3x + 1 \rightarrow \text{coordinate } (-1, 3, 1),$$

$$F(1) = x^2 - x + 3 \rightarrow \text{coordinate } (1, -1, 3).$$

La matrice associata alla base canonica è dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Polinomio caratteristico. Espandendo $\det(A - \lambda I)$ lungo la prima colonna:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 + 1] + 2[1 - (3 - \lambda)] \\ &= (2 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 + 1 - 2] = (2 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 - 1] \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda - 1)(3 - \lambda + 1) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 4). \end{aligned}$$

Verifica: termine noto $= p(0) = (-2)^2(-4) = 16 = \det A$. ✓

Autovalori. $\lambda = 2$ con $\text{m.a.}(2) = 2$; $\lambda = 4$ con $\text{m.a.}(4) = 1$.

Molteplicità geometriche. Poiché $\lambda = 4$ è semplice, per la Proposizione 4 si ha $\text{m.g.}(4) = 1 = \text{m.a.}(4)$. Per $\lambda = 2$ calcoliamo:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le prime due righe sono opposte ($R_1 + R_2 = \mathbf{0}$), quindi il rango è determinato da R_1 e R_3 : la sottomatrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $-2 \neq 0$, dunque $\text{rk}(A - 2I) = 2$ e

$$\text{m.g.}(2) = 3 - 2 = 1 \neq 2 = \text{m.a.}(2).$$

Conclusione. Poiché $\text{m.g.}(2) < \text{m.a.}(2)$, per il Teorema 4 F **non è diagonalizzabile**.

Esercizio Svolto 3

(Da un esame di Roma Tre.) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Trovare, se esistono, una matrice diagonale D e una matrice invertibile C tali che $D = C^{-1}AC$.

Soluzione. Passo 1: rango. Tutte le righe di A sono uguali, quindi $\text{rk } A = 1$. Per il Teorema del rango, $\dim \text{Ker } A = 4 - 1 = 3$.

Passo 2: autovalore $\lambda = 0$. Poiché A non è invertibile, $\lambda = 0$ è autovalore con $\text{m.g.}(0) = 3$.

Passo 3: quarto autovalore. Il polinomio caratteristico ha grado 4 e ha $\lambda = 0$ almeno come radice tripla. La quarta radice è reale (poiché i complessi compaiono in coppie). Per trovarla senza calcolare $\det(A - \lambda I)$, si osserva che la somma di tutte le colonne di A dà $(4, 4, 4, 4)^T = 4 \cdot (1, 1, 1, 1)^T$; ovvero

$$A(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = F(1, 1, 1, 1)^T = 4 \cdot (1, 1, 1, 1)^T.$$

Quindi $\lambda = 4$ è il quarto autovalore, con autovettore $(1, 1, 1, 1)^T$ e $\text{m.g.}(4) = 1 = \text{m.a.}(4)$.

Passo 4: molteplicità di $\lambda = 0$. Poiché $\text{m.g.}(0) = 3$ e la somma totale delle molteplicità geometriche è $3 + 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, per il Corollario 4 A è diagonalizzabile con $\text{m.a.}(0) = 3$.

Passo 5: costruzione di D e C . La matrice diagonale è $D = \text{diag}(0, 0, 0, 4)$. Tre autovettori indipendenti nel nucleo si trovano osservando che $Ae_i = Ae_j$ per ogni i, j (le colonne di A sono tutte uguali), quindi le differenze $e_i - e_j$ stanno nel nucleo:

$$E(0) = \mathcal{L}((1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)).$$

La matrice C si costruisce mettendo in colonna i quattro autovettori in corrispondenza con gli autovalori su D :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per similitudine, il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \lambda^3(4 - \lambda) = -\lambda^3(\lambda - 4)$.

Esercizio Svolto 4

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Soluzione. Polinomio caratteristico. Sviluppando il determinante di $A - \lambda I$ lungo la terza riga (l'ultimo elemento è $1 - \lambda$, gli altri due sono nulli):

$$p(\lambda) = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} k-\lambda & 1 \\ 1 & k-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[(k-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)(k-\lambda-1)(k-\lambda+1).$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = k - 1$, $\lambda_3 = k + 1$.

Caso 1: $k \neq 0$ e $k \neq 2$. I tre autovalori sono tutti distinti (si verifica che $\lambda_1 \neq \lambda_2$ iff $k \neq 2$, e $\lambda_1 \neq \lambda_3$ iff $k \neq 0$). Tre autovalori reali e distinti implicano diagonalizzabilità per la Proposizione 4.

Caso 2: $k = 0$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ (con m.a. = 2) e $\lambda_2 = -1$ (con m.a. = 1). Calcoliamo m.g.(1):

$$A - I|_{k=0} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La somma $R_1 + R_2 = (0, 0, 2)^T$ è indipendente da R_1 , dunque $\text{rk}(A - I) = 2$ e m.g.(1) = $3 - 2 = 1 \neq 2 = \text{m.a.}(1)$. La matrice **non è diagonalizzabile** per $k = 0$.

Caso 3: $k = 2$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ (con m.a. = 2) e $\lambda_3 = 3$ (con m.a. = 1). Calcoliamo m.g.(1):

$$A - I|_{k=2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le due righe non nulle sono identiche, dunque $\text{rk}(A - I) = 1$ e m.g.(1) = $3 - 1 = 2 = \text{m.a.}(1)$. La matrice **è diagonalizzabile** per $k = 2$.

Conclusione. Riassumendo in tabella:

k	Autovalori	Molteplicità	Diagonalizzabile?
$k \neq 0, 2$	$1, k-1, k+1$ distinti	m.a. = 1 per tutti	Sì
$k = 0$	1 (doppio), -1 (semplice)	m.g.(1) = $1 < \text{m.a.}(1) = 2$	No
$k = 2$	1 (doppio), 3 (semplice)	m.g.(1) = $2 = \text{m.a.}(1) = 2$	Sì

La matrice A è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 0$.