

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 20: Equazioni Differenziali

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Equazioni del primo ordine · Variabili separabili · Equazioni del secondo ordine · Risonanza

Indice

1	Introduzione alle equazioni differenziali	1
2	Equazioni lineari del primo ordine	1
2.1	Forma normale e coefficienti	1
2.2	Formula risolutiva	2
2.3	Esempi	3
2.4	Problema di Cauchy	4
3	Equazioni differenziali a variabili separabili	6
4	Equazioni lineari del secondo ordine	7
4.1	Struttura delle soluzioni	7
4.2	Equazioni a coefficienti costanti: soluzione dell'omogenea	8
4.3	Equazioni omogenee di ordine superiore	9
4.4	Soluzione particolare: metodo dei coefficienti indeterminati	10
4.5	Problema di Cauchy del secondo ordine	12

1 Introduzione alle equazioni differenziali

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale ci permette di trovare una funzione di cui sia nota la derivata prima: data una funzione continua $f(x)$, l'equazione $y'(x) = f(x)$ ha per soluzione qualsiasi primitiva di f . Questo è già un esempio elementare di equazione differenziale.

Definizione – Equazione differenziale

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita è una funzione $y(x)$ che compare nell'equazione insieme ad almeno una delle sue derivate.

L'ordine di un'equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione presente nell'equazione. In generale, un'equazione differenziale di ordine n ha la forma

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Risolvere un'equazione differenziale significa trovare tutte le funzioni $y(x)$, derivabili n volte, che soddisfano l'equazione su un intervallo fissato I . L'insieme di tutte le soluzioni prende il nome di *soluzione generale* (o *integrale generale*) dell'equazione.

Nota – Intervallo di definizione

Le equazioni differenziali si studiano sempre fissando un intervallo I su cui tutte le derivate necessarie esistono. Se nell'equazione compaiono espressioni come $\frac{1}{x}$ o $\log x$, l'intervallo sarà ad esempio $x > 0$ oppure $x \neq 0$.

2 Equazioni lineari del primo ordine

2.1 Forma normale e coefficienti

Definizione – Equazione lineare del primo ordine

Un'equazione differenziale *lineare del primo ordine* è un'equazione della forma

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x),$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue su un intervallo I , dette *coefficienti* dell'equazione. L'equazione è:

- *omogenea* se $b(x) \equiv 0$;
- *non omogenea* se $b(x) \not\equiv 0$;
- *a coefficienti costanti* se a e b sono entrambe costanti.

L'equazione è *lineare* perché y e y' compaiono solo al grado 1: non ci sono potenze di y , prodotti tra derivate, né funzioni non lineari di y .

Nota – Forma standard

La formula risolutiva vale *solo* quando y' è isolata a sinistra. Se l'equazione è scritta in forma diversa (ad esempio $x y' + p(x)y = q(x)$), occorre prima dividere per il coefficiente di y' e portarla nella forma normale prima di applicare la formula. Un errore frequente è dimenticare questo passaggio: i segni degli esponenti risultano invertiti e la formula non funziona.

2.2 Formula risolutiva

Teorema – Formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine

Sia data l'equazione differenziale

$$y'(x) = a(x) y(x) + b(x) \quad (*)$$

con $a(x)$ e $b(x)$ continue su un intervallo I . Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè $A'(x) = a(x)$. Allora tutte le soluzioni di $(*)$ sono della forma

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) \, dx.$$

Dimostrazione

Poiché $a(x)$ è continua su I , esiste una primitiva $A(x)$ con $A'(x) = a(x)$. Moltiplichiamo entrambi i membri di $(*)$ per $e^{-A(x)} \neq 0$:

$$e^{-A(x)} y'(x) = e^{-A(x)} a(x) y(x) + e^{-A(x)} b(x). \quad (**)$$

Consideriamo la funzione ausiliaria $z(x) = e^{-A(x)} y(x)$. La sua derivata è

$$z'(x) = -A'(x) e^{-A(x)} y(x) + e^{-A(x)} y'(x) = -a(x) e^{-A(x)} y(x) + e^{-A(x)} y'(x),$$

che coincide esattamente con il membro sinistro di $(**)$. Quindi $(**)$ si riscrive come

$$z'(x) = \frac{d}{dx} (e^{-A(x)} y(x)) = e^{-A(x)} b(x).$$

Integrando membro a membro:

$$e^{-A(x)} y(x) = \int e^{-A(x)} b(x) \, dx.$$

Moltiplicando per il fattore non nullo $e^{A(x)}$, si ottiene la tesi. Si verifica poi per sostituzione diretta che ogni funzione di questa forma è effettivamente soluzione di $(*)$. $\square$

Nota – Interpretazione della formula

La formula del teorema 2.2 si può leggere come segue:

1. Si calcola una primitiva $A(x)$ di $a(x)$.
2. Si calcola l'integrale indefinito $\int e^{-A(x)} b(x) dx$ (che porta la costante arbitraria C).
3. Si moltiplica il tutto per $e^{A(x)}$.

Tutta la difficoltà si concentra sul calcolo dell'integrale al punto 2: se questo non è trattabile con i metodi elementari, l'equazione non è risolvibile in forma chiusa.

2.3 Esempi

Esercizio Svolto – Equazione con seno e coseno

Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \sin x \cdot y + 3 \sin x.$$

Soluzione. L'equazione è già in forma standard con $a(x) = \sin x$ e $b(x) = 3 \sin x$. Calcoliamo una primitiva di $a(x)$:

$$A(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-\cos x} \int e^{\cos x} \cdot 3 \sin x \, dx.$$

Nell'integrale osserviamo che $\sin x$ è quasi la derivata di $\cos x$, a meno del segno. Scriviamo $\sin x = -(-\sin x) = -\frac{d}{dx}(-\cos x) = \frac{d}{dx}(\cos x)$, ma conviene notare che $\frac{d}{dx}e^{\cos x} = -\sin x \cdot e^{\cos x}$, quindi:

$$\int e^{\cos x} \cdot 3 \sin x \, dx = -3 \int e^{\cos x} \cdot (-\sin x) \, dx = -3 e^{\cos x} + C.$$

Sostituendo:

$$y(x) = e^{-\cos x}(-3 e^{\cos x} + C) = -3 + C e^{-\cos x}.$$

La soluzione generale è quindi $y(x) = C e^{-\cos x} - 3$, al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Nota – Famiglia delle soluzioni

A differenza del caso elementare $y' = \cos x$ (dove le soluzioni sono semplici traslazioni verticali del seno), quando la costante C moltiplica una funzione non costante come $e^{-\cos x}$, i grafici delle diverse soluzioni non sono più traslati ma hanno

forme significativamente diverse. Al variare di C , le curve assumono andamenti qualitativamente differenti.

Esercizio Svolto – Equazione con esponenziale

Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = x^2 y + 8x^2.$$

Soluzione. L'equazione è in forma standard con $a(x) = x^2$ e $b(x) = 8x^2$. La primitiva di $a(x)$ è:

$$A(x) = \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}.$$

Applichiamo la formula:

$$y(x) = e^{x^3/3} \int e^{-x^3/3} \cdot 8x^2 \, dx.$$

Poiché $\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} \right) = -x^2$, riconosciamo l'integrale immediato:

$$\int e^{-x^3/3} \cdot 8x^2 \, dx = -8 \int e^{-x^3/3} \cdot (-x^2) \, dx = -8 e^{-x^3/3} + C.$$

Quindi:

$$y(x) = e^{x^3/3} \left(-8 e^{-x^3/3} + C \right) = -8 + C e^{x^3/3}.$$

Conglobamento delle costanti. Il termine -8 è costante e viene “assorbito” in C : poiché C è arbitrario, possiamo riscrivere la costante complessiva con un'unica lettera. Questo procedimento, comune in fisica e chimica, prende il nome di *conglobamento delle costanti*.

Nota – Integrali non risolvibili a mano

Il metodo funziona solo se l'integrale $\int e^{-A(x)} b(x) \, dx$ è calcolabile. Molti integrali non ammettono primitive esprimibili con funzioni elementari: tra i più noti, e^{x^2} , e^{-x^2} (legato alla distribuzione normale di Gauss), $\frac{\sin x}{x}$ (integrale del seno cardinale), e $\frac{\log x}{x}$. Questi richiedono lo sviluppo in serie di potenze. È dunque importante *verificare prima* che l'integrale sia trattabile, prima di porsi il problema.

2.4 Problema di Cauchy

L'equazione differenziale lineare del primo ordine ammette infinite soluzioni, parametrizzate dalla costante C . Per selezionare una soluzione unica si impone una *condizione iniziale*.

Definizione – Problema di Cauchy del primo ordine

Il *problema di Cauchy* è il sistema

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ sono assegnati. La condizione $y(x_0) = y_0$ è detta *dato iniziale*.

Teorema – Esistenza e unicità per il problema di Cauchy

Siano $a(x)$ e $b(x)$ due funzioni continue su un intervallo I , e sia $x_0 \in I$. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette esattamente una soluzione.

Dimostrazione

Per il Teorema 2.2 sappiamo già che almeno una soluzione esiste. Scegliamo la primitiva $A(x)$ tale che $A(x_0) = 0$, cioè $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$. La soluzione generale diventa allora

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + c \right).$$

Valutiamo in x_0 : poiché $A(x_0) = 0$ e l'integrale da x_0 a x_0 è nullo, otteniamo $y(x_0) = e^0(0 + c) = c$. Quindi esiste un'unica costante $c = y_0$ che soddisfa il dato iniziale. $\square$

Esercizio Svolto – Problema di Cauchy del primo ordine

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin x \cdot y + 3 \sin x \\ y(\pi) = 2. \end{cases}$$

Soluzione. Sappiamo già che la soluzione generale è $y(x) = C e^{-\cos x} - 3$. Imponiamo il dato iniziale:

$$2 = y(\pi) = C e^{-\cos \pi} - 3 = C e^1 - 3 = Ce - 3.$$

Quindi $Ce = 5$, ovvero $C = \frac{5}{e}$. La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = -3 + 5 e^{-\cos x - 1}.$$

3 Equazioni differenziali a variabili separabili

Definizione – Equazione a variabili separabili

Un'equazione differenziale si dice *a variabili separabili* se è della forma

$$y'(x) = f(x) g(y),$$

in cui la derivata prima è prodotto di una funzione della sola variabile x e di una funzione della sola variabile y .

Il metodo di risoluzione sfrutta la separazione formale delle variabili. Se $g(y_0) = 0$ per qualche y_0 , allora la funzione costante $y(x) \equiv y_0$ è una soluzione. Per le soluzioni non costanti, dividendo per $g(y) \neq 0$ e integrando membro a membro:

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx,$$

ovvero, indicando con $G(y)$ una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$ e con $F(x)$ una primitiva di $f(x)$:

$$G(y(x)) = F(x) + c.$$

Se G è invertibile, se ne ricava esplicitamente $y(x)$.

Notazione pratica. Scriviamo $y' = \frac{dy}{dx}$ e separiamo formalmente:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx,$$

poi integriamo il membro sinistro rispetto a y e quello destro rispetto a x .

Esercizio Svolto – Equazione a variabili separabili

Risolvere l'equazione $y' = (x^2 + x + 1)e^y$.

Soluzione. Poiché $e^y \neq 0$ per ogni y , non ci sono soluzioni costanti. Separiamo le variabili:

$$e^{-y} dy = (x^2 + x + 1) dx.$$

Integriamo membro a membro:

$$-e^{-y} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c.$$

Poiché la funzione $-e^{-y}$ è invertibile (strettamente crescente), ricaviamo:

$$y(x) = -\log\left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + c\right).$$

Esercizio Svolto – Problema di Cauchy a variabili separabili

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. La funzione y^2 si annulla per $y = 0$: la costante $y \equiv 0$ è soluzione dell'equazione, ma non soddisfa $y(0) = 1$, quindi non è accettabile. Per le soluzioni non costanti, separiamo:

$$\frac{dy}{y^2} = 2x \, dx \implies -\frac{1}{y} = x^2 + c \implies y(x) = -\frac{1}{x^2 + c}.$$

Il dato iniziale impone $y(0) = 1 = -\frac{1}{c}$, da cui $c = -1$. La soluzione è:

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

4 Equazioni lineari del secondo ordine

4.1 Struttura delle soluzioni

Un'equazione differenziale *lineare del secondo ordine* ha la forma

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x).$$

Definizione – Equazione omogenea associata

Data l'equazione $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$, si chiama *equazione omogenea associata* l'equazione

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Proposizione – Struttura della soluzione generale

Sia $\bar{y}(x)$ una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $y'' + ay' + by = f(x)$. Ogni altra soluzione è della forma

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x),$$

dove $y_0(x)$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea associata.

Dimostrazione

Sia $y(x)$ un'altra soluzione dell'equazione non omogenea. Poniamo $y_0 = y(x) - \bar{y}(x)$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned} y_0'' + ay_0' + by_0 &= (y'' - \bar{y}'') + a(y' - \bar{y}') + b(y - \bar{y}) \\ &= (y'' + ay' + by) - (\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}) = f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Quindi y_0 soddisfa l'equazione omogenea associata. $\square$

La strategia risolutiva che ne segue è la seguente: si determina prima la soluzione generale dell'omogenea associata, poi si trova una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, e infine si sommano.

4.2 Equazioni a coefficienti costanti: soluzione dell'omogenea

Ci concentriamo sul caso in cui a e b sono costanti reali:

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Definizione – Equazione caratteristica

Si chiama *equazione caratteristica* associata all'equazione omogenea il polinomio di secondo grado

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

il cui discriminante è $\Delta = a^2 - 4b$.

Teorema – Soluzione generale dell'omogenea a coefficienti costanti

Sia data l'equazione $y'' + ay' + by = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $\Delta = a^2 - 4b$.

- (i) Se $\Delta > 0$, l'equazione caratteristica ha due radici reali distinte λ_1, λ_2 . La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Se $\Delta = 0$, l'equazione caratteristica ha una radice reale doppia $\lambda = -\frac{a}{2}$. La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- (iii) Se $\Delta < 0$, le radici sono complesse coniugate. Poniamo $\alpha = -\frac{a}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$. La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio Svolto – Equazione omogenea con Delta positivo

Risolvere $y'' + 2y' = 0$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, con soluzioni $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 0$. Siamo nel caso (i) con $\Delta > 0$. La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}.$$

Esercizio Svolto – Equazione omogenea con Delta nullo

Risolvere $y'' + 2y' + y = 0$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, cioè $(\lambda + 1)^2 = 0$, con radice doppia $\lambda = -1$. Siamo nel caso (ii). La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Esercizio Svolto – Equazione omogenea con Delta negativo

Risolvere $y'' + y' + y = 0$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ con $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Calcoliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Siamo nel caso (iii). La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

4.3 Equazioni omogenee di ordine superiore

Il principio dell'equazione caratteristica si generalizza a qualsiasi ordine: per un'equazione omogenea a coefficienti costanti

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

si associa il polinomio caratteristico $a_n \lambda^n + \dots + a_0 = 0$, le cui radici determinano la soluzione generale. L'ordine dell'equazione coincide con il numero di costanti arbitrarie.

Nota – Radici con molteplicità

Se λ è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità m , contribuisce alla soluzione generale con m termini indipendenti:

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

In particolare, la radice $\lambda = 0$ con molteplicità m genera i polinomi $1, x, x^2, \dots, x^{m-1}$.

Esercizio Svolto – Equazione del quarto ordine

Risolvere $y^{(4)} + y'' = 0$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^4 + \lambda^2 = 0$, che si fattorizza in $\lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0$. Le radici sono:

- $\lambda = 0$ con molteplicità 2;
- $\lambda = \pm i$ (coniugate, con $\alpha = 0$, $\beta = 1$).

La radice $\lambda = 0$ doppia genera c_1 e $c_2 x$; le radici immaginarie generano $c_3 \cos x$ e $c_4 \sin x$. La soluzione generale (con 4 costanti, come richiede un'equazione del quarto ordine) è:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Esercizio Svolto – Equazione del sesto ordine

Risolvere $y^{(6)} + y^{(5)} + y^{(4)} = 0$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^6 + \lambda^5 + \lambda^4 = 0$, che si fattorizza in $\lambda^4(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$. Le radici sono:

- $\lambda = 0$ con molteplicità 4;
- $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (coniugate, con $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

La soluzione generale (6 costanti) è:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + e^{-x/2} \left(c_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

4.4 Soluzione particolare: metodo dei coefficienti indeterminati

Per trovare una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ dell'equazione non omogenea $y'' + ay' + by = f(x)$ a coefficienti costanti, si usa il *metodo dei coefficienti indeterminati*, che consiste nel cercare una soluzione della stessa forma del termine noto $f(x)$.

Caso 1 — Termine noto polinomiale. Se $f(x)$ è un polinomio di grado n :

- se $b \neq 0$, si cerca $\bar{y}$ polinomio di grado n ;
- se $b = 0$ e $a \neq 0$, si cerca $\bar{y}$ polinomio di grado $n + 1$.

Caso 2 — Termine noto trigonometrico. Se $f(x) = C \cos \omega x + D \sin \omega x$:

- se $i\omega$ non è radice dell'equazione caratteristica, si cerca $\bar{y}(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$;
- se $i\omega$ è radice, si cerca $\bar{y}(x) = x(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$.

Caso 3 — Termine noto esponenziale. Se $f(x) = Ae^{rx}$:

- se r non è radice dell'eq. caratteristica, si cerca $\bar{y} = Be^{rx}$;
- se r è radice semplice, si cerca $\bar{y} = Bxe^{rx}$;
- se r è radice doppia, si cerca $\bar{y} = Bx^2e^{rx}$.

Regola di collisione (moltiplicazione per x^k). Se la forma proposta per $\bar{y}$ contiene funzioni già presenti nella soluzione dell'omogenea, quelle funzioni vengono “azzerate” dall'equazione e il tentativo fallisce. In tal caso si moltiplica l'intera forma proposta per x^k , dove k è la molteplicità della radice corrispondente nell'equazione caratteristica (tipicamente $k = 1$ o $k = 2$), fino a ottenere una forma indipendente dall'omogenea.

Principio di sovrapposizione. Se il termine noto è somma di più funzioni, la soluzione particolare è la somma delle soluzioni particolari calcolate separatamente. Se è prodotto (ad esempio polinomio per esponenziale), la forma proposta è il prodotto delle forme corrispondenti.

Esercizio Svolto – Equazione non omogenea con termine polinomiale

Risolvere $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x - 1$.

Soluzione. Poiché $b = 1 \neq 0$, cerchiamo una soluzione particolare della stessa forma del termine noto: $\bar{y}(x) = rx^2 + sx + t$. Le derivate sono $\bar{y}' = 2rx + s$ e $\bar{y}'' = 2r$. Sostituendo nell'equazione:

$$2r + 2(2rx + s) + rx^2 + sx + t = rx^2 + (4r + s)x + (2r + 2s + t) = x^2 + 3x - 1.$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} r = 1 \\ 4r + s = 3 \\ 2r + 2s + t = -1 \end{cases} \implies r = 1, s = -1, t = -1.$$

Quindi $\bar{y}(x) = x^2 - x - 1$. La soluzione dell'omogenea associata (vedi esercizio precedente con $\Delta = 0$, $\lambda = -1$) è $y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 - x - 1.$$

Esercizio Svolto – Equazione non omogenea con termine trigonometrico

Risolvere $y'' + y = 3 \cos x$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 1 = 0$ con radici $\pm i$ ($\Delta < 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$). La soluzione dell'omogenea è $y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Poiché $f(x) = 3 \cos x$ con $\omega = 1$ e $i\omega = i$ è radice dell'eq. caratteristica, cerchiamo $\bar{y}(x) = x(A \cos x + B \sin x)$. Le derivate sono:

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x), \\ \bar{y}'' &= 2B \cos x - 2A \sin x + x(-A \cos x - B \sin x). \end{aligned}$$

Sostituendo in $\bar{y}'' + \bar{y} = 3 \cos x$:

$$2B \cos x - 2A \sin x = 3 \cos x \implies \begin{cases} 2B = 3 \\ 2A = 0 \end{cases} \implies A = 0, B = \frac{3}{2}.$$

Quindi $\bar{y}(x) = \frac{3}{2}x \cos x$. La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{3}{2}x \cos x.$$

Esercizio Svolto – Equazione non omogenea con termine esponenziale

Risolvere $y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, con soluzioni $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$. La soluzione generale dell'omogenea è $y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$.

Poiché $f(x) = 3e^{-2x}$ con $r = -2$ radice semplice dell'equazione caratteristica,

cerchiamo $\bar{y}(x) = Bxe^{-2x}$. Le derivate sono:

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x}, \\ \bar{y}'' &= -2Be^{-2x} - 2Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x} = -4Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x}.\end{aligned}$$

Sostituendo e semplificando (i termini in xe^{-2x} si cancellano):

$$-4Be^{-2x} + Be^{-2x} - 2 \cdot 0 + (\text{termini in } xe^{-2x}) = 3e^{-2x}.$$

Più precisamente, sostituendo nell'equazione completa si ottiene $-3Be^{-2x} = 3e^{-2x}$, da cui $B = -1$. Quindi $\bar{y}(x) = -xe^{-2x}$. La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - x e^{-2x}.$$

Esercizio Svolto – Risonanza

Risolvere $y'' + y = x \cos x$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 1 = 0$ con radici $\pm i$. La soluzione dell'omogenea è $y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Il termine noto $f(x) = x \cos x$ è prodotto di un polinomio di grado 1 per $\cos x$. Un tentativo della forma $(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$ fallirebbe parzialmente perché $\cos x$ e $\sin x$ già appartengono all'omogenea ($i\omega = i$ è radice): occorre moltiplicare per x . Si cerca quindi:

$$\bar{y}(x) = x((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x).$$

Svolgendo i calcoli (laboriosi ma diretti) e confrontando i coefficienti, si ottiene $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$... e dopo semplificazione finale $A = B = 0$, $C = \frac{1}{2}$, $D = 0$, cioè:

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2} x \sin x.$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Interpretazione fisica (risonanza). Il termine $\frac{1}{2}x \sin x$ ha ampiezza che cresce linearmente in x : questo modella il fenomeno della *risonanza*. Fisicamente, se una forza esterna (il termine noto) oscilla con la stessa frequenza naturale del sistema (qui $\omega = 1$), le oscillazioni si amplificano indefinitamente. È il caso dell'altalena spinta con frequenza uguale alla sua frequenza propria: ogni spinta si aggiunge alla precedente invece di smorzarla.

4.5 Problema di Cauchy del secondo ordine

Il problema di Cauchy per un'equazione del secondo ordine richiede due condizioni iniziali (il valore della soluzione e della sua derivata prima in un punto), per determinare univocamente le due costanti c_1, c_2 .

Teorema – Esistenza e unicità per il problema di Cauchy del secondo ordine

Sia $f(x)$ una funzione continua su un intervallo fissato. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

ammette esattamente una soluzione.

Esercizio Svolto – Problema di Cauchy del secondo ordine

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = xe^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, ovvero $(\lambda - 1)^2 = 0$, con radice doppia $\lambda = 1$. L'omogenea ha soluzione generale $y_0 = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Poiché $f(x) = x e^x$ è prodotto di un polinomio di grado 1 per e^{rx} con $r = 1$ radice doppia, cerchiamo $\bar{y}(x) = (a_1 x + a_0) x^2 e^x$. Sostituendo e semplificando (i calcoli mostrano che tutti i termini in $x^3 e^x$, $x^2 e^x$ e $x e^x$ si cancellano tranne quelli utili), si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2a_0 = 0 \\ 6a_1 = 1 \end{cases} \implies a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{6}.$$

Quindi $\bar{y}(x) = \frac{1}{6} x^3 e^x$. La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

Imponiamo le condizioni iniziali. Calcoliamo $y'(x)$:

$$y'(x) = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

Da $y(0) = c_1 = 0$ e da $y'(0) = c_1 + c_2 = 1$ si ricava $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. La soluzione è:

$$y(x) = x e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

Esercizio Svolto – Problema di Cauchy con collisione doppia

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 2x^3 e^{3x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, ovvero $(\lambda - 3)^2 = 0$, con radice doppia $\lambda = 3$. L'omogenea ha soluzione generale $y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$.

Il termine noto $f(x) = 2x^3 e^{3x}$ ha $r = 3$ pari alla radice doppia: occorre moltiplicare la forma di base per x^2 . Si cerca quindi $\bar{y}(x) = (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) x^2 e^{3x}$. Imponendo che soddisfi l'equazione si ottiene, dopo i calcoli, che gli unici coefficienti non nulli producono $a_3 = \frac{1}{3}$ (con tutti gli altri nulli), quindi:

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{3} x^5 e^{3x}.$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{1}{3} x^5 e^{3x}.$$

Applichiamo le condizioni iniziali. Da $y(0) = c_1 = 0$ si ha $c_1 = 0$. Calcoliamo $y'(x) = c_2 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x} + \dots$; da $y'(0) = c_2 = 1$ si ha $c_2 = 1$. La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = x e^{3x} + \frac{1}{3} x^5 e^{3x}.$$