

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 6: Riduzione di Gauss-Jordan

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Matrici a scalini · Operazioni elementari per riga · Determinanti · Rango ·
Sistemi lineari · Matrice inversa

Indice

1	Introduzione: sistemi triangolari e motivazione	1
2	Matrici a scalini	1
2.1	Pivot	2
3	Operazioni elementari per riga	2
3.1	Matrici equivalenti per riga	3
3.2	Esempi di riduzione	3
4	Applicazioni	4
4.1	Calcolo dei determinanti	4
4.2	Calcolo del rango	5
4.3	Risoluzione di sistemi lineari	8
4.4	Calcolo della matrice inversa	10
5	Esercizio d'esame: sistema parametrico con Gauss-Jordan	12

1 Introduzione: sistemi triangolari e motivazione

L'obiettivo di questo capitolo è presentare un metodo di risoluzione dei sistemi lineari computazionalmente più conveniente rispetto alla regola di Cramer, che si basa sul calcolo della matrice inversa. Tale metodo è detto di *riduzione* (o di *eliminazione*) ed è dovuto ai matematici tedeschi Gauss e Jordan.

L'idea fondamentale è la seguente: un **sistema triangolare**, cioè un sistema la cui matrice dei coefficienti è triangolare, si risolve immediatamente per sostituzione all'indietro. Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 3 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

ha matrice dei coefficienti triangolare superiore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dall'ultima equazione si ricava subito $z = 3$; sostituendo nella seconda si ottiene $y = 3 + z = 6$; infine, dalla prima, $x = 1 - y - z = 1 - 6 - 3 = -8$.

Il metodo di Gauss-Jordan consiste nel trasformare un qualsiasi sistema lineare in una forma simile, più semplice da risolvere, operando sulle righe della matrice associata. Questo approccio è particolarmente efficiente dal punto di vista computazionale: la regola di Cramer per un sistema $n \times n$ richiede dell'ordine di $n! \cdot n$ moltiplicazioni, un costo proibitivo per n grande. La riduzione di Gauss-Jordan abbassa drasticamente l'ordine di complessità ed è alla base degli algoritmi usati dai calcolatori.

2 Matrici a scalini

Non tutte le matrici possono essere trasformate in matrici triangolari (si pensi alle matrici non quadrate). Per questo si introduce un concetto più generale, che fa da "surrogato" delle matrici triangolari.

Definizione – Matrice a scalini

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Diremo che A è **a scalini** (o **ridotta a scalini**) se il primo elemento non nullo di ogni riga si trova più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente. Le righe interamente nulle, se presenti, devono trovarsi in fondo alla matrice.

Nota – Casi particolari

La matrice nulla è considerata a scalini a vuoto (non avendo elementi non nulli, la condizione è soddisfatta vacuamente). Analogamente, una matrice costituita da una sola riga è sempre a scalini. Sono matrici a scalini anche tutte le matrici diagonali e le matrici triangolari superiori.

Esempi. Le seguenti matrici sono a scalini:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Non è invece a scalini la matrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

poiché l'elemento della seconda riga non è nullo e non sta più a destra del primo elemento non nullo della prima riga. Analogamente, la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

non è a scalini perché il primo elemento non nullo della prima riga è in posizione (1, 2), mentre quello della seconda riga è in posizione (2, 1), cioè più a *sinistra*.

2.1 Pivot

Definizione – Pivot

Il primo elemento non nullo di ogni riga di una matrice a scalini si chiama **pivot** (o, alla francese, *pivot*).

Esempio. Nella matrice a scalini

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i pivot sono gli elementi $a_{12} = -1$, $a_{24} = 1$ e $a_{37} = -3$.

3 Operazioni elementari per riga

Il processo di trasformazione di una matrice in forma a scalini si basa su tre **operazioni elementari per riga**:

OP1) Scambio di due righe: $R_i \leftrightarrow R_j$.

OP2) Moltiplicazione di una riga per uno scalare $\lambda \neq 0$: $R_i \rightarrow \lambda R_i$.

È fondamentale che $\lambda \neq 0$: se fosse ammesso $\lambda = 0$, si trasformerebbero righe non nulle in righe nulle, alterando il rango della matrice.

OP3) Somma a una riga di un multiplo di un'altra: $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$.

Questa è l'operazione più importante e più frequentemente utilizzata nel processo di riduzione.

Nota – Solo operazioni per riga

A differenza di quanto fatto nel calcolo dei determinanti, dove si poteva operare indifferentemente per righe o per colonne, nel contesto della risoluzione dei sistemi lineari si eseguono **solo operazioni per riga**. Scambiare due colonne equivarrebbe a scambiare le incognite, alterando la soluzione del sistema.

Teorema – Riduzione a scalini

Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ può essere portata in una forma a scalini usando le operazioni elementari per riga.

La forma a scalini ottenuta *non è unica*: una stessa matrice può essere ridotta a scalini in modi differenti, seguendo sequenze diverse di operazioni. Tuttavia, come vedremo, il numero di pivot è sempre lo stesso.

3.1 Matrici equivalenti per riga

Definizione – Equivalenza per riga

Due matrici $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si dicono **equivalenti per riga** se è possibile passare da A a B (o viceversa) tramite una sequenza finita di operazioni elementari per riga.

Quanto studiato finora permette di affermare che ogni matrice è equivalente per riga a una matrice a scalini.

3.2 Esempi di riduzione

Esempio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice non è a scalini. Scambiando le due righe si ottiene

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

che è a scalini, con due pivot: a'_{11} e a'_{22} .

Esempio 2. Consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dobbiamo anzitutto annullare gli elementi sotto b_{11} . Applichiamo le operazioni $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ e $R_3 \rightarrow R_3 + R_1$:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resta da annullare il 2 in posizione $(3, 2)$. Con $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$:

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha tre pivot, che sono esattamente gli elementi diagonali.

Esempio 3. Riduciamo a scalini la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -6 & 9 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Con $R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2$, poi $R_1 \leftrightarrow R_4$, e proseguendo con le opportune operazioni di riga (annullamento degli elementi sotto ogni pivot), si ottiene la forma a scalini

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha tre pivot: d_{11} , d_{22} e d_{33} .

4 Applicazioni

Le operazioni elementari per riga hanno numerose applicazioni. Ne presentiamo quattro fondamentali.

4.1 Calcolo dei determinanti

Le operazioni elementari per riga hanno effetti noti sul determinante di una matrice quadrata (cfr. le proprietà dei determinanti studiate in precedenza):

- **OP1** (scambio di righe): il determinante cambia segno.
- **OP2** (moltiplicazione per λ): il determinante viene moltiplicato per λ .
- **OP3** (somma di un multiplo): il determinante non cambia.

Il modo più conveniente di usare la riduzione di Gauss-Jordan per calcolare il determinante di una matrice quadrata consiste nel trasformarla in una triangolare superiore (che è in particolare a scalini), il cui determinante è il prodotto degli elementi diagonali. Si deve però tenere traccia dei cambi di segno (OP1) e dei fattori di moltiplicazione (OP2) applicati durante la riduzione.

Esercizio Svolto – Determinante 3x3

Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Procediamo con la riduzione per riga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Il determinante della matrice triangolare è il prodotto degli elementi diagonali:
 $\det A = -(1 \cdot 1 \cdot (-5)) = 5$.

Esercizio Svolto – Determinante 4x4

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Procediamo con la riduzione di Gauss-Jordan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_5}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_5 \rightarrow R_5 - 3R_2]{R_4 \rightarrow R_4 + R_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5 \rightarrow R_5 - R_3]{R_4 \rightarrow R_4 + R_3} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_5 \rightarrow R_5 - R_4} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Il determinante è $-(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2)) = 2$.

4.2 Calcolo del rango

La riduzione di Gauss-Jordan fornisce un metodo efficace per il calcolo del rango.

Proposizione – Righe non nulle di una matrice a scalini

Le righe non nulle di una matrice a scalini sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione

Consideriamo una matrice a scalini A con r righe non nulle e prendiamo una combinazione lineare nulla $\lambda_1 R_1(A) + \lambda_2 R_2(A) + \dots + \lambda_r R_r(A) = \mathbf{0}$.

Poiché A è a scalini, nella colonna del primo pivot (quello della prima riga) l'unico elemento non nullo tra le righe considerate è a_{1,j_1} (pivot della prima riga). Dalla combinazione lineare nulla si ricava necessariamente $\lambda_1 = 0$.

Eliminato il primo termine, si ripete l'argomento: nella colonna del secondo pivot, l'unico contributo non nullo è $\lambda_2 \cdot a_{2,j_2}$, da cui $\lambda_2 = 0$. Proseguendo in questo modo si ottiene $\lambda_i = 0$ per ogni i , il che prova l'indipendenza lineare. $\square$

Da questa proposizione segue immediatamente il seguente risultato.

Proposizione – Rango di una matrice a scalini

Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero dei suoi pivot.

Dimostrazione

I pivot cadono necessariamente sulle righe non nulle della matrice. Poiché le righe con i pivot sono linearmente indipendenti e tutte le rimanenti sono nulle, il rango della matrice è dato dal numero dei suoi pivot. $\square$

Proposizione – Le operazioni per riga preservano il rango

Matrici equivalenti per riga hanno lo stesso rango.

Dimostrazione

Verifichiamo che ciascuna delle tre operazioni elementari preserva il rango:

OP1 (scambio di righe): le righe della matrice sono le stesse, solo in ordine diverso. Se erano linearmente indipendenti prima, lo sono ancora dopo; il rango non cambia.

OP2 (moltiplicazione per $\lambda \neq 0$): le dipendenze lineari tra le righe sono preservate (basta riscalarlo il coefficiente nella combinazione lineare). Se fosse ammesso $\lambda = 0$, righe non nulle diverrebbero nulle, riducendo il rango: ecco perché $\lambda \neq 0$ è essenziale.

OP3 (somma di un multiplo): le operazioni elementari per riga mandano minori nulli in minori nulli dello stesso ordine e minori non nulli in minori non nulli dello stesso ordine. Quindi il massimo ordine di minori non nulli resta invariato, e il rango non cambia.

Inoltre, il metodo di riduzione annulla le righe linearmente dipendenti da quelle su cui cadono i pivot. Ne segue che matrici equivalenti per riga hanno lo stesso rango.

$\square$

Nota – La riduzione annulla le righe dipendenti

Il procedimento di Gauss-Jordan “scova e azzera” le righe linearmente dipendenti: è proprio in questo modo che punta al rango esatto della matrice.

Dal risultato precedente otteniamo il corollario fondamentale.

Teorema – Rango tramite i pivot

Il rango di una matrice A è uguale al numero dei pivot di una sua qualsiasi matrice equivalente per riga (cioè di una sua qualsiasi forma a scalini).

Questo risultato fornisce una **quarta caratterizzazione del rango**, che si aggiunge alle tre precedenti:

1. massimo ordine di minori non nulli;
2. massimo numero di righe linearmente indipendenti;
3. massimo numero di colonne linearmente indipendenti;
4. numero di pivot di una qualsiasi matrice a scalini equivalente per riga.

Nota – Osservazione sulla forma a scalini

La forma ridotta a scalini può cambiare a seconda delle operazioni scelte, ma il numero di pivot che si trovano alla fine del procedimento è sempre lo stesso.

Esercizio Svolto – Calcolo del rango

Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Riduciamo a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice a scalini ha 2 pivot, quindi $\text{rk}(A) = 2$.

Rango per righe, rango per colonne e minori non nulli

La riduzione di Gauss-Jordan permette anche di dimostrare un risultato fondamentale che collega le diverse caratterizzazioni del rango.

Teorema – Equivalenza delle caratterizzazioni del rango

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) il rango di A vale r ;

- (ii) A ha al più r righe linearmente indipendenti;
- (iii) A ha al più r colonne linearmente indipendenti.

Dimostrazione

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supponiamo che $\text{rk}(A) = r$. Allora A contiene un minore non nullo di ordine r e tutti i minori di ordine maggiore sono nulli. Consideriamo le r righe che costituiscono tale minore non nullo. Applicando la riduzione a scalini a tali r righe, se qualche riga si annullasse avremmo meno di r pivot, il che contraddirebbe il fatto che la riduzione di Gauss-Jordan lascia invariato il rango. Necessariamente tutte le r righe scelte sono linearmente indipendenti.

Supponiamo ora per assurdo che ci siano $r + 1$ righe linearmente indipendenti in A . Applicando la riduzione a scalini a tali $r + 1$ righe, selezioniamo il minore costituito dalle righe ottenute e dalle colonne su cui cadono i pivot. Abbiamo così trovato un minore non nullo di ordine $r + 1$, contraddicendo l'ipotesi che il rango di A fosse r .

(ii) $\Rightarrow$ (i). Se A ha al più r righe linearmente indipendenti, applicando la riduzione a scalini si trovano r pivot. Selezionando le righe non nulle e le colonne su cui cadono i pivot, si ottiene un minore non nullo di ordine r ; il rango di A vale dunque r .

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Supponiamo che A abbia al massimo k righe linearmente indipendenti con colonne $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$. Ogni riga $R_i(A)$ della matrice può allora essere scritta come combinazione lineare delle k righe indipendenti:

$$R_i(A) = \lambda_{i1}\rho_1 + \lambda_{i2}\rho_2 + \dots + \lambda_{ik}\rho_k.$$

Chiamiamo C la matrice $k \times n$ le cui righe sono $\rho_1, \dots, \rho_k$ e B la matrice $m \times k$ dei coefficienti λ_{ij} . Le equazioni sopra possono essere scritte in forma compatta come $A = BC$. Passando alle trasposte, $A^T = C^T B^T$: le righe di A^T (cioè le colonne di A) sono combinazione lineare delle k righe di B^T , quindi A ha al più k colonne linearmente indipendenti. L'argomento è simmetrico, il che prova l'equivalenza. $\square$

4.3 Risoluzione di sistemi lineari

Il metodo di Gauss-Jordan per la risoluzione dei sistemi lineari si articola nei seguenti passi:

1. si scrive la **matrice completa** (o matrice aumentata) $[A \mid b]$;
2. si riduce la matrice completa a scalini tramite operazioni elementari per riga;
3. si riscrive il sistema dalla matrice ridotta: il nuovo sistema ha le stesse soluzioni dell'originale, ma è più facile da risolvere;
4. le incognite corrispondenti alle colonne *senza* pivot vengono declassate a **parametri** (variabili libere);
5. si risolve per sostituzione all'indietro.

Nota – Collegamento con Rouché-Capelli

Le operazioni per riga non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema: trasformano il sistema di partenza in uno equivalente, cioè con esattamente le stesse soluzioni, ma più facile da risolvere.

Le colonne su cui *non* cadono i pivot corrispondono alle incognite da declassare a parametro. Il numero di parametri liberi è $n - r$, dove n è il numero di incognite e r il rango (numero di pivot). Ciò è in accordo con il teorema di Rouché-Capelli.

Esercizio Svolto – Sistema determinato

Risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 2 \\ 3z = 1. \end{cases}$$

Soluzione. La matrice incompleta è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, che è già a scalini con rango 3 e i pivot cadono in corrispondenza delle tre incognite. Dall'ultima equazione: $z = \frac{1}{3}$. Sostituendo nella seconda: $y = 2 + z = \frac{7}{3}$. Dalla prima: $x = \frac{1}{2}(-y - z) = -\frac{4}{3}$.

Esercizio Svolto – Sistema indeterminato a scalini

Risolvere il sistema lineare a scalini
$$\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ z + t = 0 \\ 2t = 2. \end{cases}$$

Soluzione. La matrice incompleta è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il rango è 3, ma abbiamo 4 incognite. Sulla seconda colonna non cade pivot, quindi la y è parametro. Dalla terza equazione: $t = 1$. Dalla seconda: $z = -t = -1$. Dalla prima: $x = 1 + t - z - y = 1 + 1 + 1 - y = 3 - y$.

La soluzione generale è:

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ y = y \\ z = -1 \\ t = 1. \end{cases}$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Esercizio Svolto – Sistema omogeneo

Risolvere il sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - t = 0 \\ 2x - 2z - t = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Il sistema è omogeneo, quindi sicuramente compatibile. Poiché abbiamo 4 incognite e solo 3 equazioni, ci aspettiamo infinite soluzioni. Scriviamo la matrice completa e riduciamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La terza riga si è annullata: le tre righe erano linearmente dipendenti, e la riduzione di Gauss-Jordan le ha “scovate e azzerate”. Il rango è $r = 2$, con pivot in prima e seconda colonna. Le incognite z e t (colonne senza pivot) diventano parametri. Il sistema ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

Il sistema ridotto è:
$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -2y + 2z - t = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione: $y = z - \frac{t}{2}$. Sostituendo nella prima: $x = 2z - y = 2z - z + \frac{t}{2} = z + \frac{t}{2}$.

La soluzione generale è:

$$\begin{cases} x = z + \frac{t}{2} \\ y = z - \frac{t}{2} \\ z = z \\ t = t. \end{cases}$$

Esercizio Svolto – Sistema impossibile

Mostrare che il sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ è impossibile.

Soluzione. La matrice completa è $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$. Con $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$. La seconda riga corrisponde all'uguaglianza $0 = -2$, che è impossibile. Questo accade perché il pivot della seconda riga cade nella colonna dei termini noti.

Nota – Regola per i sistemi omogenei

Per un sistema lineare omogeneo con n incognite e rango r :

- se $r = n$, il sistema ha un'unica soluzione (la soluzione banale $x_i = 0$ per ogni i);
- se $r < n$, il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni.

In particolare, un sistema omogeneo è *sempre compatibile* e, se il numero di equazioni è inferiore al numero di incognite, ha sicuramente infinite soluzioni.

4.4 Calcolo della matrice inversa

La riduzione a scalini permette anche di calcolare la matrice inversa di una matrice invertibile. Il metodo è il seguente:

1. si costruisce la matrice a blocchi $[A \mid I_n]$, di tipo $n \times 2n$, affiancando alla matrice A la matrice identità;
2. si applicano operazioni elementari per riga con lo scopo di trasformare la parte sinistra (A) nella matrice identità;

3. se A è invertibile, la matrice a blocchi si trasformerà in $[I_n \mid A^{-1}]$: la matrice che compare a destra è l'inversa di A .

Esercizio Svolto – Inversa 2x2

Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Costruiamo la matrice aumentata $[A \mid I_2]$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Ora dobbiamo annullare l'elemento sopra il secondo pivot (pivotare "all'insù"):

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right).$$

La matrice che si legge a destra è l'inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si noti come il denominatore 3 sia esattamente $|\det A| = |1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2| = 3$. Non è un caso: il determinante compare sempre a denominatore nel calcolo dell'inversa.

Esercizio Svolto – Inversa 3x3

Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Costruiamo $[A \mid I_3]$ e applichiamo le operazioni per riga:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_3]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Ora pivoiamo all'insù per ottenere l'identità a sinistra:

$$\xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3]{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Quindi:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5 Esercizio d'esame: sistema parametrico con Gauss-Jordan

Esercizio Svolto – Sistema parametrico

Discutere e risolvere il seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ky - z + t = k \\ x + 2y - t = 1 \\ 4x + (k+4)y - (2k+1)z = k+1 \\ x + y - kz = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Scriviamo la matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & -1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & k+4 & -(2k+1) & 0 & k+1 \\ 1 & 1 & -k & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Strategia: conviene operare in modo che il pivot *non dipenda da k* , per evitare la comparsa di denominatori parametrici. A tal fine, scambiamo $R_1 \leftrightarrow R_4$ e poi lavoriamo sulla terza riga sottraendole la prima e il doppio della quarta, così da semplificarla il più possibile.

Un buon primo passo è eliminare il parametro k dalla terza riga sottraendo opportune combinazioni delle altre. Dopo $R_1 \leftrightarrow R_4$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -k & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & k+4 & -(2k+1) & 0 & k+1 \\ 1 & k & -1 & 1 & k \end{array} \right).$$

Ora eseguiamo $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$, $R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1$, $R_4 \rightarrow R_4 - R_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & k & 2k-1 & 0 & k+1 \\ 0 & k-1 & k-1 & 1 & k \end{array} \right).$$

Non avendo k come pivot in seconda colonna (il pivot è 1), le successive operazioni sono facili. Eseguiamo $R_3 \rightarrow R_3 - kR_2$ e $R_4 \rightarrow R_4 - (k-1)R_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2k-1-k^2 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k-1 & k & 1 \end{array} \right).$$

Si osserva che $2k-1-k^2 = -(k^2-2k+1) = -(k-1)^2$ e che le ultime due righe sono uguali. Con $R_4 \rightarrow R_4 - R_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -(k-1)^2 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Discussione.

Caso $k \neq 1$: il termine $-(k-1)^2 \neq 0$, quindi abbiamo 3 pivot (colonne 1, 2, 3). Il rango della matrice completa e della matrice incompleta è 3. Con 4 incognite, il sistema ha $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. La variabile t (colonna 4, senza pivot) è parametro.

Si risolve per sostituzione all'indietro. Dalla terza riga:

$$-(k-1)^2 z + kt = 1 \implies z = \frac{kt-1}{(k-1)^2}.$$

Dalla seconda riga: $y = 1 + t - kz$, e dalla prima: $x = kz - y$.

Svolgendo i calcoli:

$$\begin{cases} x = \frac{k^2(t-1) + 2kt - t - 1}{(k-1)^2} \\ y = \frac{k^2 - k(2t+1) + t + 1}{(k-1)^2} \\ z = \frac{kt-1}{(k-1)^2} \\ t = t. \end{cases}$$

Caso $k = 1$: la matrice completa diventa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Abbiamo nuovamente 3 pivot, ma ora cadono sulle colonne 1, 2 e 4. La variabile z (colonna 3, senza pivot) è parametro. Il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Dalla terza riga: $t = 1$. Dalla seconda: $y = 1 + t - z = 2 - z$. Dalla prima: $x = z - y = z - (2 - z) = 2z - 2$.

La soluzione per $k = 1$ è:

$$\begin{cases} x = 2z - 2 \\ y = 2 - z \\ z = z \\ t = 1. \end{cases}$$