

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 7: Spazi Vettoriali

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Vettori geometrici · Gruppi astratti · Spazi vettoriali · Dipendenza e
indipendenza lineare

Indice

1	Vettori geometrici	1
1.1	Vettori applicati e vettori liberi	1
1.2	Operazioni con i vettori liberi	2
2	Gruppi astratti	3
3	Spazi vettoriali reali	4
3.1	Definizione e assiomi	4
3.2	Esempi di spazi vettoriali	5
3.3	Prime proprietà degli spazi vettoriali	6
4	Dipendenza e indipendenza lineare	7
4.1	Combinazioni lineari	7
4.2	Esercizi svolti	8

1 Vettori geometrici

1.1 Vettori applicati e vettori liberi

Definizione – Vettore geometrico (applicato)

Dati due punti A e B di un piano, si chiama *vettore geometrico* (o *vettore applicato*) $\overrightarrow{AB}$ la freccia orientata che parte da A e arriva a B . Il punto A è detto *punto di applicazione*, il punto B è detto *punto finale*.

Un vettore applicato è univocamente determinato da quattro caratteristiche:

- (i) il **punto di applicazione** A ;
- (ii) la **direzione**, ovvero la classe di rette parallele che contengono il segmento AB ;
- (iii) il **verso**, ossia uno dei due sensi di percorrenza della retta;
- (iv) il **modulo** (o *norma*) $\|\overrightarrow{AB}\|$, cioè la lunghezza del segmento AB .

Se $A = B$, il vettore $\overrightarrow{AA}$ è detto *vettore nullo* o *vettore banale*: ha lunghezza zero e direzione e verso indefiniti.

Definizione – Equipollenza

Due vettori applicati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si dicono *equipollenti* se hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo. In tal caso differiscono soltanto per il punto di applicazione. Per convenzione, tutti i vettori banali $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ sono equipollenti tra loro.

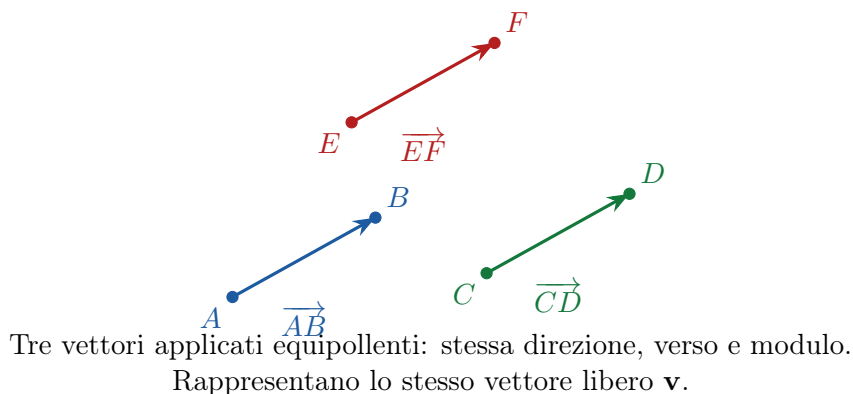
Nota – Analogia con le frazioni equivalenti

La relazione di equipollenza è analoga alla relazione di equivalenza tra frazioni: così come $\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}$ rappresentano tutte lo stesso numero razionale, le infinite frecce equipollenti a $\overrightarrow{AB}$ rappresentano lo stesso vettore libero. La semplificazione avviene rimuovendo l'informazione sul punto di applicazione, esattamente come si riducono le frazioni ai minimi termini.

Definizione – Vettore libero

Si chiama *vettore libero* la classe di equipollenza di un vettore applicato, ovvero l'insieme di tutte le frecce che hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo, indipendentemente dal punto di applicazione. Un vettore libero è identificato solo da direzione, verso e modulo: il suo punto di applicazione è indeterminato.

Si indica con $\mathcal{V}_2$ l'insieme di tutti i vettori liberi del piano (il pedice 2 si riferisce alla dimensione del piano) e con $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_3$ gli analoghi insiemi per la retta e per lo spazio tridimensionale.



Nota – Vettori liberi e applicati in fisica

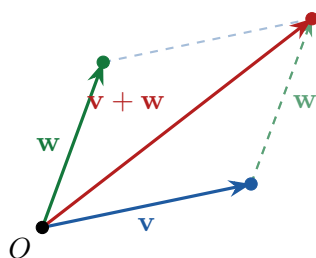
La distinzione tra vettori liberi e applicati è fondamentale in fisica. Nello studio della *dinamica del punto materiale* le forze si trattano come vettori liberi: il corpo è idealizzato come un punto materiale, per cui è irrilevante dove sia applicata la forza e si possono spostare tutti i vettori in un unico punto. Nello studio del *corpo rigido*, invece, il punto di applicazione conta: una forza applicata in alto o in basso produce un momento diverso e può mettere il corpo in rotazione. La scelta del modello (vettore libero o applicato) dipende quindi dalla situazione fisica.

1.2 Operazioni con i vettori liberi

Siano $v, w \in \mathcal{V}_2$ e sia $\overrightarrow{AB}$ un vettore che individua v . Per la definizione di equipollenza, esiste un unico vettore $\overrightarrow{BC}$ applicato in B che rappresenta w .

Definizione – Somma di vettori liberi

La *somma* $v + w$ è il vettore libero individuato da $\overrightarrow{AC}$ (metodo *testa-coda* o *regola della poligonale*). Per due vettori non paralleli è equivalente alla *regola del parallelogramma*: si applicano v e w nello stesso punto e si prende la diagonale del parallelogramma che essi formano.



Regola del parallelogramma: la diagonale dà $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (rosso). Metodo testa-coda: $\mathbf{w}$ (dashed) applicato alla punta di $\mathbf{v}$ raggiunge lo stesso punto.

La somma di vettori liberi gode delle seguenti proprietà. Dati $u, v, w \in \mathcal{V}_2$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- (i) **Commutatività:** $v + w = w + v$;
- (ii) **Associatività:** $(u + v) + w = u + (v + w)$;

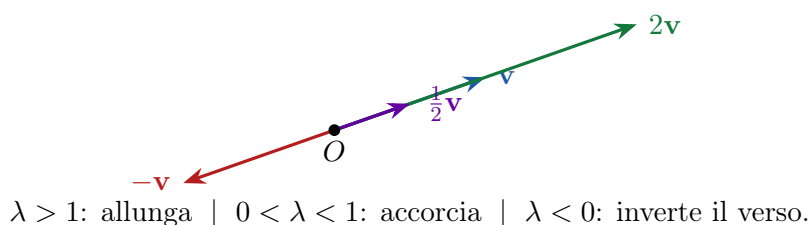
- (iii) **Elemento neutro:** esiste il vettore nullo $\mathbf{0}$ tale che $v + \mathbf{0} = v$ per ogni v ;
 (iv) **Opposto:** per ogni v esiste $-v$ tale che $v + (-v) = \mathbf{0}$.

Definizione – Moltiplicazione per uno scalare reale

Dato $v \in \mathcal{V}_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, il vettore λv è definito come segue:

- se $\lambda = 0$, allora $\lambda v = \mathbf{0}$;
- se $\lambda > 0$, allora λv ha la stessa direzione e lo stesso verso di v , con modulo $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$;
- se $\lambda < 0$, allora λv ha la stessa direzione ma il verso opposto a v , con modulo $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

In tutti i casi vale $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.



Valgono inoltre le seguenti proprietà miste, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $v, w \in \mathcal{V}_2$:

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v), \quad 1 \cdot v = v.$$

2 Gruppi astratti

Definizione – Operazione su un insieme

Dato un insieme non vuoto G , una funzione $*$: $G \times G \rightarrow G$ è detta *operazione* su G . Si usa la notazione $a * b$ per $*(a, b)$ e si parla di *struttura* $(G, *)$.

Definizione – Gruppo e gruppo abeliano

Sia G un insieme non vuoto dotato di un'operazione $*$. Si dice che $(G, *)$ è un *gruppo* se valgono le seguenti proprietà:

- Associatività:** per ogni $a, b, c \in G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$;
- Elemento neutro:** esiste $e \in G$ tale che $a * e = e * a = a$ per ogni $a \in G$;
- Elemento simmetrico (inverso):** per ogni $a \in G$ esiste $a' \in G$ tale che $a * a' = a' * a = e$.

Se vale inoltre la proprietà commutativa

- per ogni $a, b \in G$, $a * b = b * a$,

allora $(G, *)$ è detto *gruppo abeliano* (o *commutativo*).

Nota – Esempi di gruppi abeliani

Sono gruppi abeliani rispetto alla somma: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$. Non è un gruppo $(\mathbb{N}, +)$: sebbene la somma sia associativa, commutativa e abbia elemento neutro 0, i naturali non contengono gli opposti dei propri elementi.

Rispetto al prodotto, sono gruppi abeliani $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ (l'asterisco indica l'esclusione dello zero, che non è invertibile). L'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dotato del prodotto riga per colonna non è un gruppo (le matrici singolari non hanno inversa), ma $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ è un gruppo, non abeliano per $n \geq 2$.

3 Spazi vettoriali reali

3.1 Definizione e assiomi

Definizione – Spazio vettoriale reale

Sia V un insieme non vuoto dotato di due operazioni:

- una *operazione interna* (somma): $+: V \times V \rightarrow V$;
- una *operazione esterna* (prodotto per scalare): $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$.

La struttura $(V, +, \cdot)$ è detta *spazio vettoriale reale* se valgono i seguenti otto assiomi. Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- A1. Associatività della somma:** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;
- A2. Elemento neutro:** $\exists \mathbf{0} \in V$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$;
- A3. Vettore opposto:** $\forall \mathbf{v} \in V, \exists -\mathbf{v} \in V$ tale che $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$;
- A4. Commutatività della somma:** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- A5. Distributiva rispetto alla somma di vettori:** $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$;
- A6. Distributiva rispetto alla somma di scalari:** $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$;
- A7. Associativa mista:** $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$;
- A8. Elemento neutro scalare:** $1_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Gli elementi di V sono detti *vettori*, quelli di $\mathbb{R}$ sono detti *scalari*.

Nota – Operazione interna ed esterna

La somma è un'operazione *interna*: prende due vettori di V e restituisce un vettore di V . Il prodotto per scalare è un'operazione *esterna*: lo scalare appartiene a $\mathbb{R}$, il vettore a V e il risultato è ancora in V . Si parla di spazio vettoriale *reale* perché gli scalari sono numeri reali; in modo analogo si definiscono spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ o su qualsiasi campo.

3.2 Esempi di spazi vettoriali

Proposizione – Esempi fondamentali

I seguenti insiemi, con le operazioni canoniche di somma e prodotto per scalare reale, sono spazi vettoriali reali:

1. $\mathbb{R}$ rispetto alla somma e al prodotto tra numeri reali. L'elemento neutro è 0 e il simmetrico di a è $-a$.
2. $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$: i vettori liberi della retta, del piano e dello spazio tridimensionale, con la somma e la moltiplicazione per scalare definite geometricamente.
3. $\mathbb{R}^n$: le n -uple $(a_1, \dots, a_n)$ con la somma componente per componente e il prodotto per scalare.
4. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: le matrici $m \times n$ e le matrici quadrate $n \times n$ con la somma e il prodotto per scalare delle matrici. L'elemento neutro è la matrice nulla $\mathbf{0}_{m,n}$.
5. $\mathbb{R}[x]$: l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x , con le operazioni

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x).$$

Il polinomio nullo (tutti i coefficienti nulli) è l'elemento neutro.

6. $\mathbb{R}^X$: l'insieme delle funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ per un insieme non vuoto X , con le operazioni definite *puntualmente* (pointwise):

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Il vettore nullo è la funzione costantemente nulla $f \equiv 0$.

Nota – Altri esempi di spazi vettoriali di funzioni

Molte famiglie di funzioni costituiscono spazi vettoriali, in quanto la somma di due funzioni e il multiplo di una funzione rimangono nella stessa famiglia:

- le funzioni *continue* su $[a, b]$;
- le funzioni *integrabili* (Riemann o Lebesgue) su un intervallo;
- le funzioni di classe C^1, C^k, C^∞ ;
- le funzioni con *limite finito* in un punto x_0 (la somma di due funzioni aventi limite finito in x_0 ha limite finito in x_0);
- le *serie convergenti*: la somma di due serie convergenti è convergente, con somma pari alla somma delle somme;
- le *soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea* del tipo $y'' + ay' + by = 0$ (la derivazione è un operatore lineare, per cui la somma di due soluzioni e il multiplo di una soluzione sono ancora soluzioni).

Controesempio. Le funzioni *monotone crescenti* su $\mathbb{R}$ *non* formano uno spazio vettoriale: moltiplicando per -1 una funzione crescente si ottiene una funzione decrescente, quindi l'operazione non è interna all'insieme.

3.3 Prime proprietà degli spazi vettoriali

Proposizione – Unicità del vettore nullo e del vettore opposto

Sia V uno spazio vettoriale. Allora:

- (i) l'elemento neutro di V è unico ed è chiamato il *vettore nullo* di V , indicato con $\mathbf{0}_V$ (o semplicemente $\mathbf{0}$);
- (ii) per ogni $\mathbf{v} \in V$ il simmetrico è unico ed è chiamato il *vettore opposto* di $\mathbf{v}$, indicato con $-\mathbf{v}$.

Dimostrazione

(i) Siano $\mathbf{0}'$ e $\mathbf{0}''$ due vettori nulli di V . Poiché $\mathbf{0}''$ è elemento neutro, sommarlo a $\mathbf{0}'$ lascia $\mathbf{0}'$ invariato; poiché $\mathbf{0}'$ è elemento neutro, sommarlo a $\mathbf{0}''$ lascia $\mathbf{0}''$ invariato. Dunque:

$$\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0}'' = \mathbf{0}''.$$

L'elemento neutro è quindi unico.

(ii) Siano $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}''$ due opposti di $\mathbf{v}$, così che $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} + \mathbf{v}'' = \mathbf{0}$. Allora:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{0} = \mathbf{v}' + (\mathbf{v} + \mathbf{v}'') = (\mathbf{v}' + \mathbf{v}) + \mathbf{v}'' = \mathbf{0} + \mathbf{v}'' = \mathbf{v}'',$$

dove si sono usati nell'ordine: l'assioma A2, la definizione di opposto, l'assioma A1 (associatività) e di nuovo la definizione di opposto. L'opposto è quindi unico. $\square$

Proposizione – Legge di annullamento del prodotto

Sia V uno spazio vettoriale reale, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in V$. Allora

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \lambda = 0 \text{ oppure } \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione

Dimostriamo per parti.

Passo 1: $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Usando la proprietà $0 = 0 + 0$ e l'assioma A6 (distributiva rispetto alla somma di scalari):

$$0 \cdot \mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}.$$

Sommando l'opposto di $0\mathbf{v}$ a entrambi i membri e usando l'associatività A1:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}) = (0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}) + (-0\mathbf{v}) = 0\mathbf{v} + (0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v})) = 0\mathbf{v} + \mathbf{0} = 0\mathbf{v}.$$

Passo 2: $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. In modo del tutto analogo, usando $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ e l'assioma A5:

$$\lambda \mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0} \implies \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0}.$$

Implicazione diretta ($\Leftarrow$). Se $\lambda = 0$, il Passo 1 garantisce $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, il Passo 2 garantisce $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Implicazione inversa ($\Rightarrow$). Supponiamo $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se $\lambda = 0$ si è concluso. Supponiamo $\lambda \neq 0$: esiste allora $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$. Moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{\lambda}$ e usando A7 (associativa mista) e A8 (elemento neutro scalare):

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \mathbf{v} \stackrel{A7}{=} \frac{1}{\lambda} (\lambda \mathbf{v}) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{0} \stackrel{\text{Passo 2}}{=} \mathbf{0}.$$

Dunque per forza $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. □

Nota – Perché servono tutti e otto gli assiomi

La dimostrazione della legge di annullamento del prodotto mostra concretamente perché sono necessari tutti e otto gli assiomi. In particolare, il passaggio cruciale del viceversa richiede l'assioma A7 (associativa mista) per spostare la parentesi da $(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \mathbf{v}$ a $\frac{1}{\lambda} (\lambda \mathbf{v})$ e l'assioma A8 (elemento neutro scalare) per concludere $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Senza questi due assiomi il conto non si chiude.

Si noti anche il contrasto con le matrici: il prodotto riga per colonna tra matrici non gode della legge di annullamento, poiché esistono matrici non nulle il cui prodotto è la matrice nulla. Il prodotto per scalare negli spazi vettoriali è invece sempre *intero*.

Proposizione – Opposto vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbf{v} \in V$. Allora $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

Dimostrazione

Il vettore $(-1)\mathbf{v}$ si comporta come l'opposto di $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{v} \stackrel{A6}{=} (1 + (-1))\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Poiché l'opposto è unico (Proposizione 3.3), si conclude $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$. □

4 Dipendenza e indipendenza lineare

4.1 Combinazioni lineari

Definizione – Combinazione lineare

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. Si chiama *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v}_i$ ogni vettore della forma

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}.$$

I numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono detti *coefficienti* della combinazione lineare.

Definizione – Dipendenza e indipendenza lineare

I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$ sono detti *linearmente dipendenti* se esistono coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, *non tutti nulli*, tali che

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}.$$

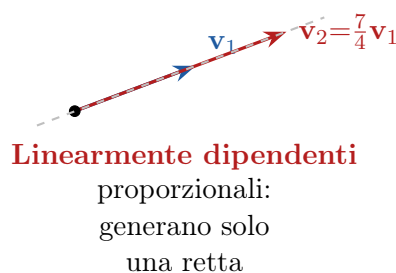
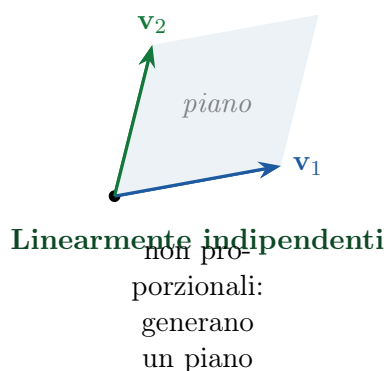
Si dicono invece *linearmente indipendenti* se l'unica combinazione lineare uguale a $\mathbf{0}$ è quella con tutti i coefficienti nulli:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Proposizione – Criteri di dipendenza lineare

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. Allora:

- (i) se tra i $\mathbf{v}_i$ è presente il vettore nullo, allora sono linearmente dipendenti;
- (ii) se tra i $\mathbf{v}_i$ ce ne sono due uguali, allora sono linearmente dipendenti;
- (iii) se tra i $\mathbf{v}_i$ ce ne sono due proporzionali, allora sono linearmente dipendenti;
- (iv) i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri;
- (v) un singolo vettore $\mathbf{v}$ è linearmente dipendente se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- (vi) due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno è multiplo dell'altro;
- (vii) se tra $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ ce ne sono $k < m$ linearmente dipendenti, allora tutti i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente dipendenti.



4.2 Esercizi svolti

Esercizio Svolto – Polinomi

Dire se i polinomi

$$p_1(x) = x - x^2, \quad p_2(x) = 2 + x - x^2, \quad p_3(x) = x^2 - x - 4$$

sono linearmente dipendenti in $\mathbb{R}[x]$.

Soluzione. Si cerca $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0$. Esplicitando e raccogliendo per grado:

$$x^2 : -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$x^1 : \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$x^0 : 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0.$$

La matrice del sistema omogeneo è

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo (la prima riga è l'opposto della seconda). Per il Teorema di Cramer il sistema ammette soluzioni non banali, dunque i tre polinomi sono **linearmente dipendenti**.

Esercizio Svolto – Matrici

Provare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soluzione. Si pone $\lambda A + \mu B + \nu C = \mathbf{0}_2$ e si esplicitano le entrate:

$$\begin{pmatrix} \lambda + \mu & \lambda + \nu \\ \lambda + \mu + \nu & \mu + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene il sistema omogeneo $\lambda + \mu = 0$, $\lambda + \nu = 0$, $\lambda + \mu + \nu = 0$, $\mu + \nu = 0$. La matrice del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha rango 3. Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette l'unica soluzione $\lambda = \mu = \nu = 0$, quindi A , B e C sono **linearmente indipendenti**.