

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 9: Dimensione

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Basi · Dimensione · Lemma di Steinitz · Coordinate · Cambiamento di base

Indice

1	Basi di uno spazio vettoriale	1
1.1	Basi canoniche	1
1.2	Il metodo degli scarti successivi	1
1.3	Coordinate rispetto a una base	2
2	Dimensione	2
2.1	Lemma di Steinitz e definizione di dimensione	3
2.2	Dimensioni di spazi notevoli	3
2.3	Il metodo della separazione dei parametri	5
2.4	Proposizione 9.17 e teorema del completamento	5
3	Coordinate e indipendenza lineare	7
3.1	Il teorema rango-coordinate	7
4	Cambiamento di base	9
4.1	Motivazione	9
4.2	Costruzione della matrice di passaggio	9
4.3	Leggi del cambiamento di coordinate	9

1 Basi di uno spazio vettoriale

Definizione – Base di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ costituiscono una **base** di V se sono generatori di V e sono linearmente indipendenti.

Per comodità si dice che lo spazio vettoriale banale $\{0\}$ ha base vuota.

Nota – Osservazione

Le due condizioni (generatori e indipendenza lineare) devono essere entrambe verificate e sono l'una indipendente dall'altra:

- il vettore $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ è non nullo ma non genera $\mathbb{R}^2$;
- i vettori $(1, 1), (2, -1), (0, -1) \in \mathbb{R}^2$ sono generatori di $\mathbb{R}^2$ ma sono linearmente dipendenti.

Inoltre, uno spazio vettoriale finitamente generato e non banale ammette infinite basi: se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base, anche $\{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ lo è per ogni scelta di scalari $\lambda_i \neq 0$.

1.1 Basi canoniche

Gli esempi fondamentali di basi sono le cosiddette *basi canoniche*:

- In $\mathbb{R}^n$: i vettori $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ formano la base canonica $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
- In $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$: le mn matrici con un solo 1 e tutti gli altri zeri formano la base canonica.
- In $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$: i monomi $\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$ formano la base canonica.

1.2 Il metodo degli scarti successivi

Teorema – Metodo degli scarti successivi

Uno spazio vettoriale V non banale e finitamente generato ammette almeno una base.

Dimostrazione

Sia S un sistema finito di generatori di V . Si scartano prima tutti i vettori nulli, ottenendo S_0 con $\mathcal{L}(S_0) = V$. Sia v_1 il primo vettore non nullo. Si procede iterativamente: al passo i , si eliminano da S_{i-1} tutti i vettori linearmente dipendenti da $v_1, \dots, v_{i-1}$, fermandosi al primo vettore indipendente v_i . L'insieme S_i che rimane è ancora un sistema di generatori. Poiché S è finito, il processo termina, e i vettori rimasti sono linearmente indipendenti: costituiscono quindi una base finita di V . $\square$

1.3 Coordinate rispetto a una base

Teorema – Unicità della rappresentazione

I vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ formano una base di V se e solo se ogni vettore di V si può scrivere in maniera *unica* come combinazione lineare dei v_i .

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Sia $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$. Sottraendo si ottiene $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = \mathbf{0}$. Per l'indipendenza lineare dei v_i tutti i coefficienti sono nulli, quindi $\lambda_i = \mu_i$ per ogni i .

($\Leftarrow$) Se ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare dei v_i , questi sono generatori. Per verificare l'indipendenza lineare, si osserva che il vettore nullo ammette la rappresentazione banale $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = \mathbf{0}$; per unicità questa è l'unica, quindi i v_i sono indipendenti. $\square$

Definizione – Coordinate rispetto a una base

Data una base ordinata $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V , se $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, la n -upla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è detta le **coordinate** (o **componenti**) di w rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Nota – Attenzione all'ordine

L'ordine dei vettori di una base è rilevante: scambiando l'ordine dei v_i si ottiene una base diversa, e le coordinate di uno stesso vettore vengono permutate di conseguenza. Per questo si parla di base *ordinata*.

Esercizio Svolto 1

Scrivere le coordinate del polinomio $p(x) = 2x^2 + x - 3 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ e $\mathcal{B}' = \{x^2 + x, x + 1, 1 - 2x^2\}$.

Soluzione. Rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$, i coefficienti si leggono direttamente: le coordinate sono $(-3, 1, 2)$.

Rispetto a $\mathcal{B}'$ si imposta l'uguaglianza

$$p(x) = a(x^2 + x) + b(x + 1) + c(1 - 2x^2) = (a - 2c)x^2 + (a + b)x + (b + c).$$

Confrontando i coefficienti si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a - 2c = 2 \\ a + b = 1 \\ b + c = -3 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 6$, $b = -5$, $c = 2$. Le coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ sono $(6, -5, 2)$.

2 Dimensione

2.1 Lemma di Steinitz e definizione di dimensione

Teorema – Lemma di Steinitz

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è una base di V e $\{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ con $n > m$, allora i w_i sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione

Consideriamo la combinazione lineare $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = \mathbf{0}$. Poiché i v_i sono una base, ciascun w_j si scrive come loro combinazione lineare con coefficienti a_{ij} . Sostituendo e raccogliendo rispetto ai v_i , si ottiene un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite λ_j . Poiché $m < n$, per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ha almeno una soluzione non banale, quindi i w_i sono linearmente dipendenti. $\square$

Proposizione – Corollario: tutte le basi hanno la stessa cardinalità

Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione

Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ due basi di V . Poiché i w_j sono indipendenti e $\{v_i\}$ è una base, il Lemma di Steinitz impone $m \leq n$. Scambiando i ruoli, $n \leq m$. Quindi $m = n$. $\square$

Definizione – Dimensione

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. La **dimensione** di V , denotata $\dim V$, è il numero di elementi di una qualsiasi base di V . Per convenzione, $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

2.2 Dimensioni di spazi notevoli

Dalle basi canoniche si ricavano immediatamente:

$$\dim \mathbb{R}^n = n, \quad \dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = mn, \quad \dim \mathbb{R}_{\leq n}[x] = n + 1.$$

Il Lemma di Steinitz garantisce inoltre che $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$.

Esercizio Svolto 2

Calcolare dimensione e base dello spazio $\mathcal{S}_3$ delle matrici simmetriche 3×3 e dello spazio $\mathcal{A}_3$ delle matrici antisimmetriche 3×3 .

Soluzione. **Matrici simmetriche.** Una generica matrice simmetrica 3×3 ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

con 6 parametri liberi. Con il metodo della separazione dei parametri:

$$A = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{13}} \\ + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{22}} + e \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{23}} + f \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{33}}.$$

Le sei matrici così ottenute sono già linearmente indipendenti per costruzione e costituiscono una base di $\mathcal{S}_3$. Pertanto $\dim \mathcal{S}_3 = 6$.

Matrici antisimmetriche. Una generica matrice antisimmetrica 3×3 ha zeri sulla diagonale e soddisfa $a_{ij} = -a_{ji}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{12}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{13}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{23}}.$$

Quindi $\dim \mathcal{A}_3 = 3$ e la base è $\{A_{12}, A_{13}, A_{23}\}$.

Nota – Formule generali

Per le matrici simmetriche e antisimmetriche di ordine n vale:

$$\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Esercizio Svolto 3

Trovare una base e la dimensione del sottospazio

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} a_{11} + a_{12} = 0, \ a_{11} + a_{13} = 0, \\ a_{11} + a_{22} = 0, \ a_{12} + a_{23} = 0 \end{array} \right\}.$$

Soluzione. Le quattro condizioni formano un sistema lineare omogeneo nelle sei incognite (le entrate della matrice). Si verifica che le equazioni sono visibilmente indipendenti (ciascuna coinvolge una variabile non presente nelle altre), quindi il rango del sistema è 4. Per il Teorema di Rouché-Capelli il numero di parametri liberi è $6 - 4 = 2$ (il sistema è su 6 variabili con 4 equazioni indipendenti dopo l'analisi; cfr. discussione in lezione). Quindi $\dim W = 2$.

Risolvendo per sostituzione: $a_{12} = -a_{11}$, $a_{13} = -a_{11}$, $a_{22} = -a_{11}$, $a_{23} = -a_{12} = a_{11}$. I parametri liberi sono a_{11} , a_{12} , a_{21} . Separandoli:

$$A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una base di W è dunque:

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio Svolto 4

Trovare la dimensione del sottospazio $U = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \mid p(0) = 0, p'(0) = 1\}$.

Soluzione. Il polinomio generico è $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Le condizioni impongono:

$$p(0) = d = 0, \quad p'(0) = c = 1.$$

Sostituendo, $p(x) = ax^3 + bx^2 + x$ con a, b liberi. Quindi $\dim U = 2$ e una base è $\{x^3 + x, x^2 + x\}$ (oppure, separando: $\{x^3, x^2, x\}$ con i vincoli già incorporati, il che fornisce la base $\{x^3 + x, x^2 + x\}$).

Nota – Attenzione

L'insieme U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, poiché non contiene il polinomio nullo (la condizione $p'(0) = 1$ non è omogenea). Tuttavia il metodo della separazione dei parametri si applica ugualmente per determinarne la dimensione.

2.3 Il metodo della separazione dei parametri

Nota – Perché funziona

Quando si risolve un sistema lineare omogeneo e si scrive la soluzione generale come combinazione lineare di tanti vettori quanti sono i parametri liberi, quei vettori sono *automaticamente* linearmente indipendenti. Questo è il **metodo della separazione dei parametri**: non è necessario verificare l'indipendenza a posteriori.

2.4 Proposizione 9.17 e teorema del completamento

Proposizione – Criterio per basi con il numero corretto di vettori

Sia $\dim V = n$ e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V ;
- (ii) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti;
- (iii) $v_1, \dots, v_n$ generano V .

Dimostrazione

(i) $\Rightarrow$ (ii): banale per definizione di base.
 (ii) $\Rightarrow$ (iii): Per il Lemma di Steinitz, $v, v_1, \dots, v_n$ sono dipendenti per ogni $v \in V$ (sono $n+1$ vettori in uno spazio di dimensione n). Dunque $\lambda v + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$ con $\lambda \neq 0$, e quindi $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n$.
 (iii) $\Rightarrow$ (i): Se fossero dipendenti, con gli scarti successivi si otterrebbe un sistema di generatori con meno di n vettori, contraddicendo il Corollario 9.12. $\square$

Nota – Conseguenza pratica

Con il numero giusto di vettori basta verificare *una sola* delle due condizioni (indipendenza o generazione): l'altra segue automaticamente. Questo semplifica notevolmente gli esercizi.

Teorema – Completamento della base

Sia $\dim V = n$ e sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti di V , con $m \leq n$. Allora esistono $n - m$ vettori $v_1, \dots, v_{n-m}$ tali che $\{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_{n-m}\}$ sia una base di V .

Dimostrazione

Sia $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base di V . L'insieme $\{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori. Applicando gli scarti successivi, i primi m vettori vengono conservati per ipotesi (sono indipendenti). Gli $n - m$ vettori mancanti si selezionano tra gli u_i non dipendenti dai precedenti. $\square$

Nota – Interpretazione

La dimensione di V è simultaneamente:

- il **numero massimo** di vettori linearmente indipendenti che si possono trovare in V ;
- il **numero minimo** di generatori necessari per V .

Ad esempio, in $\mathbb{R}^5$ non si possono mai trovare più di 5 vettori indipendenti, ma si possono avere più di 5 generatori (quelli in eccesso sono combinazioni lineari degli altri).

Esercizio Svolto 5

Completare la base del sottospazio $U = \mathcal{L}(x + 1, x^3 + 4) \subset \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ a una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

Soluzione. I due vettori generatori di U formano già una sua base: $x + 1$ ha grado 1 e $x^3 + 4$ ha grado 3, quindi non sono multipli l'uno dell'altro. Poiché $\dim \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = 4$, mancano due vettori. Cerchiamo nella base canonica: tra i vettori $\{x + 1, x^3 + 4, 1, x, x^2, x^3\}$, il vettore x è uguale a $(x + 1) - 1 + 0 \cdot (x^3 + 4) \dots$ aggiungendo

1 si ottiene x che è multiplo di $x+1-1$: quindi $x = (x+1) - 1$, cioè x è dipendente da $x+1$ e 1. Si selezionano 1 (indipendente) e poi x^2 (che non compare nei tre già scelti). Il vettore x^3 è dipendente da x^3+4 e 1. Pertanto una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ che completa quella di U è

$$\{x+1, x^3+4, 1, x^2\}.$$

3 Coordinate e indipendenza lineare

3.1 Il teorema rango-coordinate

Teorema – Teorema rango-coordinate

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n con base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Siano $w_1, \dots, w_m \in V$ e sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice le cui righe sono le coordinate dei w_i rispetto a $\mathcal{B}$. Allora:

- (i) $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente indipendenti $\iff \text{rk } A = m$;
- (ii) se $m = n$, la condizione è equivalente a $\det A \neq 0$;
- (iii) se $\text{rk } A = R < m$, tra i w_i ci sono al più R vettori linearmente indipendenti; essi corrispondono alle righe di un minore non nullo di ordine R di A .

Nota – Conseguenza fondamentale

Qualsiasi problema di indipendenza lineare in uno spazio vettoriale V si riduce a un problema su matrici in $\mathbb{R}^n$: i vettori w_i sono indipendenti se e solo se le loro n -uple di coordinate sono indipendenti. Rispetto alla base canonica, le coordinate di un vettore coincidono con le sue componenti, rendendo i conti particolarmente semplici.

Nota – Gauss vs. metodo degli orlati

Attenzione alla richiesta dell'esercizio:

- Se si chiede di *trovare una base* di W , si può usare il **metodo di Gauss**, che modifica i vettori ma è più rapido.
- Se si chiede di *selezionare una base tra i generatori dati*, Gauss non è utilizzabile (cambia i vettori); occorre il **metodo degli orlati**, che individua i vettori indipendenti originali tramite i minori non nulli di A .

Esercizio Svolto 6

Calcolare una base e la dimensione di

$$W = \mathcal{L}((0, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Soluzione. Rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, le coordinate coincidono con i vettori stessi. Scartando subito il vettore nullo, la matrice delle coordinate è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con il metodo degli orlati, le prime due righe sono visibilmente indipendenti. Si verifica che la terza riga è somma delle prime due, quindi $\text{rk } A = 2$. Pertanto $\dim W = 2$ e una base è

$$\{(0, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 0)\}.$$

Esercizio Svolto 7

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare una base e la dimensione di

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Soluzione. Rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, le coordinate sono:

$$A_1 = (1, 1, k, 1), \quad A_2 = (k, k, 0, 0), \quad A_3 = (k, k, k, k).$$

La matrice delle coordinate (per righe) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ k & k & 0 & 0 \\ k & k & k & k \end{pmatrix}.$$

Le prime due colonne di A_2 e A_3 sono uguali, quindi per qualsiasi k l'orlato 2×2 fatto con le prime due colonne è zero. Si verifica però che le prime due righe di A sono indipendenti (per qualsiasi k), quindi $\text{rk } A \geq 2$. Per verificare se il rango è 3, si calcola il determinante del minore 3×3 estratto dalle prime tre righe e da tre colonne opportune:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 0 & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix} = k(k^2 + k + 1).$$

Il discriminante di $k^2 + k + 1$ è $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, quindi $k^2 + k + 1 \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Se $k \neq 0$: il determinante è non nullo, $\text{rk } A = 3$, $\dim W = 3$ e i tre vettori formano una base.

Se $k = 0$: il determinante si annulla. La matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1... ma le prime due righe originali per $k = 0$ sono $(1, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0)$, quindi $\text{rk } A = 1$ e $\dim W = 1$.

In realtà, osservando con più cura le tre righe per $k = 0$: $A_1 = (1, 1, 0, 1)$, $A_2 = (0, 0, 0, 0)$, $A_3 = (0, 0, 0, 0)$. Pertanto $\dim W = 1$ e una base è $\{A_1\}$.

4 Cambiamento di base

4.1 Motivazione

Lo stesso vettore $v \in V$ ha coordinate diverse rispetto a basi diverse. Il problema è trovare la legge che governa il cambiamento delle coordinate al variare della base: questo è l'analogo algebrico delle *trasformazioni di Galileo* in fisica, dove si descrive lo stesso punto mobile rispetto a due sistemi di riferimento inerziali diversi.

4.2 Costruzione della matrice di passaggio

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Fissate due basi ordinate

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\},$$

si scrivono i vettori della nuova base come combinazione lineare della vecchia:

$$v'_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Definizione – Matrice di passaggio

La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ le cui colonne sono le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$ è detta **matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$** .

Nota – Notazione colonna

La matrice di passaggio si scrive *per colonna*: la j -esima colonna contiene le coordinate di v'_j rispetto a $\mathcal{B}$. Questa convenzione è essenziale per la correttezza delle formule del cambiamento di coordinate.

4.3 Leggi del cambiamento di coordinate

Denotiamo con X la colonna delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ e con X' la colonna rispetto a $\mathcal{B}'$.

Teorema – Leggi del cambiamento di coordinate

Sia $A = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Per ogni $v \in V$:

$$X = A \cdot X', \quad X' = A^{-1} \cdot X.$$

Inoltre, la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = A^{-1} = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1}.$$

Dimostrazione

[Idea della dimostrazione] Sostituendo le espressioni (9.3) di v'_j in termini di v_j nella scrittura $v = \sum_j x'_j v'_j$, e raccogliendo rispetto ai v_i , si trova $x_i = \sum_j a_{ij} x'_j$, cioè $X = AX'$. L'inversa segue moltiplicando per A^{-1} (che esiste perché A è invertibile per il Teorema 9.21). $\square$

Esercizio Svolto 8

Siano le basi di $\mathbb{R}^2$ (esempio svolto in lezione):

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}' = \left\{ v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calcolare la matrice di passaggio $A = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ e verificare la legge $X = AX'$ su un vettore.

Soluzione.

Passo 1 — Calcolo di A . Si scrivono i vettori di $\mathcal{B}'$ come c.l. di $\mathcal{B}$ (colonne di A):

$$\text{Prima colonna: } \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ sistema } \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 2 \end{cases}, \text{ da cui } \beta = -3, \alpha = 8.$$

$$\text{Seconda colonna: } \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ sistema } \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases}, \text{ da cui } \beta = 1, \alpha = -1.$$

$$A = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 5 \neq 0.$$

Passo 2 — Verifica su un vettore. Scegliamo $v = 2v_1 + v_2 = (4, 2) + (3, 2) = (7, 4)$, quindi $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per trovare X' : $x'_1 v'_1 + x'_2 v'_2 = (7, 4)$, cioè $x'_1 + x'_2 = 7$, $2x'_1 + x'_2 = 4$, da cui $x'_1 = -3$, $x'_2 = 10$, quindi $X' = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Verifica $X = AX'$:

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 - 10 \\ 9 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ 19 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo ci dice che la formula $X = AX'$ si applica alle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, non rispetto alla base canonica. Per $v = 2v_1 + v_2$ le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (non le componenti canoniche $(7, 4)$). Quando si usa la base canonica come $\mathcal{B}$, la formula è diretta perché coordinate = componenti. L'Es. 9.24.1 del libro (su $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$) illustra questo in modo esplicito.

Esercizio Svolto 9

Nello spazio $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, siano $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ e $\mathcal{B}' = \{2x + 1, x + 1, x^2 - 1\}$. Calcolare la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e le coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ del polinomio $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

Soluzione. Si scrivono i vettori di $\mathcal{B}'$ come combinazione lineare di $\mathcal{B}$:

$$2x + 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2, \quad x + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2, \quad x^2 - 1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2.$$

La matrice di passaggio (per colonne) è

$$A = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate di $p(x)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Quindi:

$$X' = A^{-1}X = A'X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 9 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Verifica: $-\frac{11}{2}(2x+1) + 9(x+1) + \frac{1}{2}(x^2-1) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = p(x)$. ✓