

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 11: Limiti

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Retta ampliata · Intorni · Limiti di funzioni · Successioni · Sottosuccessioni

Indice

1	La retta reale ampliata con elementi di topologia	1
2	Limiti di una funzione reale di una variabile reale	1
3	Specializzazione della definizione generale di limite	2
4	Limite di una restrizione e conseguenze	2
5	Limite destro e sinistro	3
6	Limite di una successione di numeri reali	3
7	Primi risultati sui limiti delle successioni	3
8	Sottosuccessioni	4

La retta reale ampliata con elementi di topologia

La retta reale ampliata e'

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

con $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In $\overline{\mathbb{R}}$ ogni insieme non vuoto ammette sup e inf; per un insieme illimitato superiormente in $\mathbb{R}$ si scrive $\sup A = +\infty$, e analogamente $\inf A = -\infty$.

Definizione – Interni in $\overline{\mathbb{R}}$ (Def. 11.1)

Gli interni fondamentali sono:

- $(x_0 - r, x_0 + r)$, con $r > 0$, se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- $(\alpha, +\infty]$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se $x_0 = +\infty$;
- $[-\infty, \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se $x_0 = -\infty$.

L'intersezione di due interni dello stesso punto contiene ancora un intorno del punto. Inoltre due punti distinti di $\overline{\mathbb{R}}$ possiedono interni disgiunti: questa proprieta' di separazione sara' essenziale per l'unicita' del limite.

Definizione – Punti di accumulazione e isolati (Def. 11.2)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e' di accumulazione per A se

$$(U \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

per ogni intorno U di x_0 . Un punto $x_0 \in A$ e' isolato se esiste un intorno U tale che $U \cap A = \{x_0\}$.

Per esempio, 0 e' punto di accumulazione di $\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$, mentre ogni suo elemento e' isolato. Il punto $+\infty$ e' punto di accumulazione di $\mathbb{N}$.

Limiti di una funzione reale di una variabile reale

Definizione – Limite generale (Def. 11.3)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di A e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se, per ogni intorno V di ℓ , esiste un intorno U di x_0 tale che

$$x \in U \cap (A \setminus \{x_0\}) \implies f(x) \in V.$$

Il valore eventualmente assunto da f in x_0 non interviene nella definizione. Se $\ell \in \mathbb{R}$ si parla di convergenza; se $\ell = \pm\infty$ di divergenza positiva o negativa.

Teorema – Unicità del limite (Teo. 11.4)

Nelle ipotesi della definizione precedente, il limite di f per $x \rightarrow x_0$, se esiste, è unico.

Dimostrazione

Supponiamo che f tenda a due punti distinti $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Scegliamo intorno disgiunti V_1, V_2 dei due punti. Dalle due definizioni di limite esistono intorno U_1, U_2 di x_0 tali che $f(x) \in V_i$ per $x \in U_i \cap (A \setminus \{x_0\})$. L'intersezione $U_1 \cap U_2$ è un intorno di x_0 e contiene almeno un punto di $A \setminus \{x_0\}$, essendo x_0 di accumulazione. In tale punto $f(x)$ dovrebbe appartenere a $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, assurdo. $\square$

Specializzazione della definizione generale di limite

La definizione per intorno comprende tutti i casi. Nelle implicazioni seguenti si sottintende sempre $x \in A$. I casi più usati sono:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists K > 0 : x > K \Rightarrow f(x) > M.$$

Le altre combinazioni si ottengono sostituendo coerentemente $x < K$ e $f(x) < -M$.

Esercizio Svolto

Provare dalla definizione che

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5.$$

Infatti $|(3x - 1) - 5| = 3|x - 2|$. Dato $\varepsilon > 0$, scegliendo $\delta = \varepsilon/3$, la condizione $0 < |x - 2| < \delta$ implica $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$.

Limite di una restrizione e conseguenze

Teorema – Limite di una restrizione (Teo. 11.5)

Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e sia x_0 punto di accumulazione sia per A sia per B . Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_B(x) = \ell.$$

Quindi, per dimostrare che un limite non esiste, basta trovare due restrizioni con limiti distinti. In particolare, se esistono $(x_n), (y_n) \subseteq A \setminus \{x_0\}$ che tendono a x_0 e lungo le quali i valori di f hanno limiti diversi, il limite di f non esiste.

Limite destro e sinistro

Definizione – Accumulazione laterale e limiti laterali (Def. 11.6)

Posti

$$A_{x_0}^- = A \cap (-\infty, x_0), \quad A_{x_0}^+ = A \cap (x_0, +\infty),$$

x_0 e' punto di accumulazione a sinistra o a destra se e' punto di accumulazione del rispettivo insieme. I limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

sono i limiti delle corrispondenti restrizioni.

Teorema – Ricostruzione dal limite laterale (Teo. 11.7)

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e' punto di accumulazione da entrambi i lati, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

Limite di una successione di numeri reali

Definizione – Limite di successione (Def. 11.8)

Una successione (a_n) tende a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se la funzione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tende a ℓ per $n \rightarrow +\infty$. In particolare,

$$a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon,$$

$$a_n \rightarrow +\infty \iff \forall M > 0 \exists N : n > N \Rightarrow a_n > M,$$

e analogamente per $-\infty$.

Esempi fondamentali sono

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p > 0), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad (p > 0), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

Primi risultati sui limiti delle successioni

Proposizione – Carattere definitivo (Prop. 11.9)

Modificare un numero finito di termini non cambia il limite di una successione. Piu' precisamente, se $a_n = b_n$ definitivamente, allora $a_n \rightarrow \ell$ se e solo se $b_n \rightarrow \ell$.

Proposizione – Ogni successione convergente e' limitata (Prop. 11.10)

Se $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ per ogni n .

Dimostrazione

Con $\varepsilon = 1$ esiste N tale che $|a_n - \ell| < 1$ per $n > N$. Per tali indici,

$$|a_n| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

I termini $a_0, \dots, a_N$ sono in numero finito; basta porre

$$C = \max\{|a_0|, \dots, |a_N|, 1 + |\ell|\}.$$

□

Una successione che tende a $+\infty$ e' illimitata superiormente; una che tende a $-\infty$ e' illimitata inferiormente. Il viceversa non vale senza ulteriori ipotesi.

Sottosuccessioni

Definizione – Sottosuccessione (Def. 11.11)

Una sottosuccessione di (a_n) e' una successione (a_{n_k}) , dove (n_k) e' una successione strettamente crescente di numeri naturali.

Teorema – Limite delle sottosuccessioni (Teo. 11.12)

Se $a_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, ogni sottosuccessione (a_{n_k}) tende allo stesso limite ℓ .

Infatti $n_k \geq k$: quando k supera la soglia richiesta dalla definizione di limite, anche n_k la supera. Di conseguenza, due sottosuccessioni con limiti distinti provano la non regolarita' della successione originaria.

Proposizione – Successione geometrica (Prop. 11.13)

Per $q \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1. \end{cases}$$

Se $q \leq -1$, la successione non e' regolare: le sottosuccessioni pari e dispari hanno comportamenti incompatibili.

Teorema – Ricomposizione pari-dispari (Teo. 11.14)

Se $a_{2k} \rightarrow \ell$ e $a_{2k+1} \rightarrow \ell$, allora $a_n \rightarrow \ell$.