

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 12: Proprieta' dei limiti

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Proprieta' definitive · Algebra dei limiti · Ordinamento · Forme
indeterminate · Composizione

Indice

1	Proprieta' definite in un intorno	1
2	Operazioni sui limiti	1
3	Limiti e ordinamento	2
4	Operazioni con i limiti in $\overline{\mathbb{R}}$	3
5	Limiti delle funzioni composte	4

Proprieta' definite in un intorno

Definizione – Proprieta' definitiva (Def. 12.1)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di A e $P(x)$ una proprieta' per $x \in A$. Si dice che P vale definitivamente per $x \rightarrow x_0$ se esiste un intorno U di x_0 tale che

$$P(x) \text{ e' vera per ogni } x \in U \cap (A \setminus \{x_0\}).$$

Proposizione – Intersezione finita (Prop. 12.2)

Se un numero finito di proprieta' vale definitivamente per $x \rightarrow x_0$, esse valgono simultaneamente in un opportuno intorno di x_0 .

La prova consiste nell'intersecare gli intorni associati alle singole proprieta'. Questa semplice osservazione consente di combinare stime ottenute separatamente.

Operazioni sui limiti

Proposizione – Valore assoluto e limitatezza locale (Prop. 12.3)

Se $f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, allora $|f(x)| \rightarrow |\ell|$ e f e' limitata in un intorno di x_0 . In particolare, definitivamente,

$$|f(x)| < 1 + |\ell|.$$

Teorema – Algebra dei limiti finiti (Teo. 12.4)

Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A , e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\lim(f + g) = \ell + m, \quad \lim(fg) = \ell m.$$

Se $m \neq 0$, allora $g(x) \neq 0$ definitivamente e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}.$$

Nota Stima per il prodotto

L'identita'

$$fg - \ell m = f(g - m) + m(f - \ell)$$

e la limitatezza locale di f riducono la prova a due quantita' che tendono a zero. Per il reciproco, la permanenza del segno assicura che g resta lontana da zero.

Per $x_0 \in \mathbb{R}$, polinomi e funzioni razionali ereditano immediatamente queste regole:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \text{se } Q(x_0) \neq 0.$$

Limiti e ordinamento

Teorema – Permanenza delle disuguaglianze (Teo. 12.5)

Se $f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, $g(x) \rightarrow m \in \mathbb{R}$ e $\ell > m$, allora $f(x) > g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$.

Dimostrazione

Poniamo $\varepsilon = (\ell - m)/3$. Definitivamente,

$$f(x) > \ell - \varepsilon, \quad g(x) < m + \varepsilon.$$

Poichè $\ell - \varepsilon > m + \varepsilon$, nell'intersezione dei due intorni risulta $f(x) > g(x)$. $\square$

Proposizione – Permanenza del segno (Prop. 12.6)

Se $f(x) \rightarrow \ell > 0$, allora $f(x) > 0$ definitivamente. Se $f(x) \rightarrow \ell < 0$, allora $f(x) < 0$ definitivamente.

Teorema – Prolungamento delle disuguaglianze (Teo. 12.7)

Se $f(x) \leq g(x)$ definitivamente, $f(x) \rightarrow \ell$ e $g(x) \rightarrow m$, con $\ell, m \in \mathbb{R}$, allora $\ell \leq m$.

Dimostrazione

Se fosse $\ell > m$, il teorema di permanenza imporrebbe $f(x) > g(x)$ definitivamente, in contraddizione con l'ipotesi dopo aver intersecato i due intorni. La disuguaglianza stretta non si prolunga in generale: per $x \neq 0$ si ha $x^2 < |x|$ vicino a zero, ma entrambi i limiti valgono zero. $\square$

Teorema – Confronto o carabinieri (Teo. 12.8)

Se definitivamente

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

e $f(x) \rightarrow \ell$, $h(x) \rightarrow \ell$, allora $g(x) \rightarrow \ell$. Per $\ell = +\infty$ basta $f \leq g$ e $f \rightarrow +\infty$; per $\ell = -\infty$ basta $g \leq h$ e $h \rightarrow -\infty$.

Dimostrazione

Se $\ell \in \mathbb{R}$, dato $\varepsilon > 0$, definitivamente

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon,$$

da cui $|g(x) - \ell| < \varepsilon$. I casi infiniti seguono direttamente dalla definizione con una

sola disuguaglianza. □

Teorema – Limite fondamentale del seno (Teo. 12.9)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dimostrazione

Per $0 < x < \pi/2$, il confronto fra triangolo inscritto, settore circolare e triangolo circoscritto fornisce

$$\sin x < x < \tan x.$$

Dividendo e usando $\tan x = \sin x / \cos x$:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

La stima elementare

$$0 \leq 1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2) \leq \frac{x^2}{2}$$

mostra che $\cos x \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$. I carabinieri danno quindi il limite destro. La funzione $\sin x/x$ è pari, quindi il limite sinistro coincide. □

Proposizione – Infinitesima per limitata (Prop. 12.10)

Se $f(x) \rightarrow 0$ e g è limitata in un intorno di x_0 , allora $f(x)g(x) \rightarrow 0$.

Operazioni con i limiti in $\overline{\mathbb{R}}$

Teorema – Somme infinite (Teo. 12.11)

Se $f(x) \rightarrow +\infty$ e g è limitata inferiormente definitivamente, allora $f(x) + g(x) \rightarrow +\infty$. Simmetricamente, se $f(x) \rightarrow -\infty$ e g è limitata superiormente, la somma tende a $-\infty$.

Teorema – Prodotti e reciproci (Teo. 12.12)

Valgono le regole seguenti, con il segno determinato dalle usuali regole dei segni:

- se $f(x) \rightarrow \pm\infty$ e $g(x) \rightarrow m \neq 0$, allora $f(x)g(x) \rightarrow \pm\infty$ o $\mp\infty$ secondo il segno di m ;
- se $|f(x)| \rightarrow +\infty$, allora $1/f(x) \rightarrow 0$;
- se $f(x) \rightarrow 0$ mantenendo segno positivo o negativo, allora $1/f(x) \rightarrow +\infty$ o $-\infty$.

Le espressioni

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

sono forme indeterminate: funzioni diverse con gli stessi limiti dei fattori possono produrre risultati diversi. Per trattarle occorre trasformare l'espressione, fattorizzare, razionalizzare o applicare criteri successivi.

Esercizio Svolto

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

La forma è $\infty - \infty$. Razionalizzando,

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Limiti delle funzioni composte

Teorema – Limite della composta (Teo. 12.13)

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(A) \subseteq B$. Siano x_0 punto di accumulazione per A e y_0 punto di accumulazione per B . Se

$$f(x) \rightarrow y_0, \quad g(y) \rightarrow \ell \quad (y \rightarrow y_0),$$

e $f(x) \neq y_0$ definitivamente, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell.$$

La condizione $f(x) \neq y_0$ non serve se $y_0 \in B$ e $g(y_0) = \ell$.

L'ipotesi evita che la funzione interna cada ripetutamente proprio nel punto escluso dalla definizione del limite esterno. Operativamente il teorema giustifica la sostituzione $y = f(x)$, purché ne siano verificate tutte le condizioni.