

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 14: Funzioni continue

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Continuità · Operazioni · Discontinuità · Funzioni monotone

Indice

1	Definizione e principali proprietà	1
2	Punti di discontinuità	2
3	Continuità delle funzioni monotone	2
4	Complementi: discontinuità delle monotone	3

Definizione e principali proprietà

Definizione – Continuità in un punto (Def. 14.1)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. La funzione f è continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in A, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

È continua su $B \subseteq A$ se è continua in ogni punto di B .

Se x_0 è punto di accumulazione di A , la definizione equivale a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Un punto isolato del dominio è invece sempre punto di continuità.

Teorema – Operazioni con funzioni continue (Teo. 14.2)

Se $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $f + g$, fg e λf sono continue in x_0 . Se $g(x_0) \neq 0$, anche f/g è continua in x_0 .

Teorema – Continuità della composta (Teo. 14.3)

Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0 .

Dimostrazione

Dato $\varepsilon > 0$, la continuità di g in $f(x_0)$ fornisce $\eta > 0$ tale che $|y - f(x_0)| < \eta$ implica $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. La continuità di f in x_0 fornisce allora $\delta > 0$ tale che, per $x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \eta$. Combinando le due implicazioni si ottiene la continuità di $g \circ f$. $\square$

Definizione – Funzione Lipschitziana (Def. 14.4)

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è Lipschitziana se esiste $L \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in A.$$

Ogni funzione Lipschitziana è continua; la stima usa direttamente $\delta = \varepsilon/L$ quando $L > 0$.

Proposizione – Prolungamento per continuità (Prop. 14.5)

Sia x_0 punto di accumulazione di A ma $x_0 \notin A$. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ammette un prolungamento continuo ad $A \cup \{x_0\}$ se e solo se esiste finito $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. In tal caso il valore è forzato: $\tilde{f}(x_0) = \ell$.

Punti di discontinuità'

Definizione – Classificazione delle discontinuità' (Def. 14.6)

Sia x_0 punto di accumulazione del dominio.

- La discontinuità' è **eliminabile** se il limite esiste finito, ma manca il valore o non coincide con esso.
- È di **prima specie** se i limiti laterali esistono finiti ma sono diversi; la loro differenza è il salto.
- È di **seconda specie** se almeno un limite laterale non esiste oppure è infinito.

Esercizio Svolto

Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Per $x \neq 1$ vale $f(x) = x + 1$, quindi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1)$. La discontinuità' è eliminabile e l'unico prolungamento continuo si ottiene sostituendo $f(1)$ con 2.

Continuità' delle funzioni monotone

Teorema – Limiti laterali delle monotone (Teo. 14.7)

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ crescente su un intervallo I e sia x_0 interno a I . Allora esistono, eventualmente infiniti, i limiti laterali e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x).$$

Per una funzione decrescente si scambiano sup e inf.

Dimostrazione

Supponiamo f crescente e poniamo $L = \sup_{x < x_0} f(x)$. Se $L \in \mathbb{R}$, dato $\varepsilon > 0$ esiste $y < x_0$ con $L - \varepsilon < f(y) \leq L$. Per $y < x < x_0$ la monotonia fornisce $L - \varepsilon < f(y) \leq f(x) \leq L$, dunque $f(x) \rightarrow L$ da sinistra. Se $L = +\infty$, per ogni M esiste $y < x_0$ con $f(y) > M$, e la stessa monotonia prova il limite infinito. Il limite destro si dimostra analogamente usando l'estremo inferiore; il caso decrescente segue invertendo le disuguaglianze. $\square$

Proposizione – Criterio di continuità' (Prop. 14.8)

Una funzione monotona su un intervallo è continua in un punto interno se e solo se i due limiti laterali coincidono con il valore della funzione. Le sue discontinuità' interne possono quindi essere soltanto salti.

Complementi: discontinuità delle monotone

Teorema – Numerabilità dei salti (Teo. 14.9)

L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione monotona definita su un intervallo è al più numerabile.

Infatti a ogni salto si può associare un razionale strettamente compreso tra i due limiti laterali. Intervalli di salto relativi a punti distinti sono disgiunti, quindi razionali distinti identificano salti distinti.

Nota Funzione a gradino

La funzione $f(x) = 0$ per $x < 0$ e $f(x) = 1$ per $x \geq 0$ è crescente e ha un unico salto in 0. Mostra che monotonia non implica continuità.