

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 16: Teoremi di Bolzano e Weierstrass

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Zeri · Valori intermedi · Compattezza · Estremi assoluti

Indice

1	Teorema degli zeri e dei valori intermedi	1
2	Conseguenze del teorema dei valori intermedi	1
3	Insiemi compatti e teorema di Weierstrass	2
4	Complementi: seconda forma di Weierstrass	3

Teorema degli zeri e dei valori intermedi

Teorema – Teorema degli zeri di Bolzano (Teo. 16.1)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e siano $a, b \in I$, $a < b$, tali che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

Dimostrazione

Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$. Dividiamo ripetutamente l'intervallo e conserviamo ogni volta una meta' $[a_n, b_n]$ ai cui estremi f ha segni opposti. Le lunghezze sono $(b-a)/2^n$, mentre (a_n) cresce e (b_n) decresce. I due estremi convergono allo stesso $c \in [a, b]$. Per continuita', $f(a_n) \rightarrow f(c)$ e $f(b_n) \rightarrow f(c)$; poiche' $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, si ottiene $f(c) = 0$. Il segno stretto agli estremi implica $c \in (a, b)$. $\square$

Le ipotesi sono essenziali. Senza continuita', la funzione che vale -1 per $x < 0$ e 1 per $x \geq 0$ cambia segno ma non si annulla. Se il dominio non e' un intervallo, $f(x) = x$ su $[-1, 0) \cup (0, 1]$ cambia segno tra -1 e 1 ma lo zero non appartiene al dominio.

Teorema – Valori intermedi, prima forma (Teo. 16.2)

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e' continua su un intervallo I , $a, b \in I$ e λ e' strettamente compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, allora esiste un punto c tra a e b tale che $f(c) = \lambda$.

Dimostrazione

Si applica il teorema degli zeri alla funzione continua $g(x) = f(x) - \lambda$, che assume segni opposti in a e b . $\square$

Teorema – Valori intermedi, seconda forma (Teo. 16.3)

L'immagine di un intervallo mediante una funzione continua e' un intervallo.

Dimostrazione

Presi $y_1 < y_2$ in $f(I)$, esistono $x_1, x_2 \in I$ con $f(x_i) = y_i$. La prima forma garantisce che ogni $\lambda \in (y_1, y_2)$ e' assunto tra x_1 e x_2 . $\square$

Conseguenze del teorema dei valori intermedi

Proposizione – Continuita' dell'inversa (Prop. 16.4)

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e' continua e strettamente monotona sull'intervallo I , allora $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ e' continua e strettamente monotona nello stesso verso di f .

Proposizione – Punto fisso (Prop. 16.5)

Se $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ e' continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = c$.

Infatti $g(x) = f(x) - x$ soddisfa $g(a) \geq 0$ e $g(b) \leq 0$; se nessun estremo è già uno zero, si applica Bolzano.

Esercizio Svolto

La funzione $f(x) = x^3 + x - 1$ è continua, con $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$: possiede uno zero in $(0, 1)$. Poiché per $x < y$ si ha $f(y) - f(x) = (y - x)(x^2 + xy + y^2 + 1) > 0$, è strettamente crescente e lo zero è unico.

Insiemi compatti e teorema di Weierstrass

Definizione – Compatto in $\mathbb{R}$ (Def. 16.6)

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se è chiuso e limitato.

Definizione – Estremi globali di una funzione (Def. 16.7)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto $x_M \in A$ è punto di massimo globale se $f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in A$; il numero $f(x_M)$ è il massimo di f . Minimo globale e punto di minimo si definiscono invertendo la disuguaglianza.

Teorema – Bolzano–Weierstrass (Teo. 16.8)

Ogni successione reale limitata ammette una sottosuccessione convergente.

Teorema – Heine–Borel in $\mathbb{R}$ (Teo. 16.9)

Per $K \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti: K è chiuso e limitato; ogni successione in K ha una sottosuccessione convergente a un punto di K ; da ogni ricoprimento aperto di K si estrae un sottoricoprimento finito.

Teorema – Teorema di Weierstrass (Teo. 16.10)

Se $K \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto e compatto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f è limitata e assume massimo e minimo assoluti su K .

Dimostrazione

Se f non fosse limitata superiormente, potremmo scegliere $x_n \in K$ con $f(x_n) > n$. Per compattezza una sottosuccessione x_{n_k} convergerebbe a $x \in K$; la continuità darebbe $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$, assurdo. Dunque $M = \sup f(K)$ è finito. Scegliamo $x_n \in K$ con $M - 1/n < f(x_n) \leq M$. Una sottosuccessione converge a $x_M \in K$ e, per continuità, $f(x_M) = M$. Applicando lo stesso ragionamento a $-f$ si ottiene il minimo. $\square$

Tutte le ipotesi sono sostanziali. Sul dominio limitato ma non chiuso $(0, 1]$, $f(x) = x^2$ non assume minimo. Sul dominio chiuso ma non limitato $[0, +\infty)$, $f(x) = e^{-x}$ non assume minimo. Infine la funzione definita su $[0, 1]$ da $f(0) = 1$ e $f(x) = x^2$ per $x > 0$ non è continua e non assume minimo.

Complementi: seconda forma di Weierstrass

Teorema – Immagine continua di un compatto (Teo. 16.11)

Se $K \subseteq \mathbb{R}$ e' compatto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ e' continua, allora $f(K)$ e' compatto.

La limitatezza di $f(K)$ segue da Weierstrass. Per la chiusura, se $y_n = f(x_n) \rightarrow y$, una sottosuccessione di (x_n) converge a $x \in K$; allora $y = f(x)$ per continuita', quindi $y \in f(K)$.