

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 17: Successioni definite per ricorrenza

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Iterazioni · Punti fissi · Metodo di Erone · Modelli discreti

Indice

1	Iterazioni di Picard e punti fissi	1
2	Metodo di Erone per la radice quadrata	1
3	Modello logistico di crescita di popolazione	2
4	La successione di Fibonacci	2

Iterazioni di Picard e punti fissi

Definizione – Iterazione di Picard (Def. 17.1)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow A$ e $x_0 \in A$. La successione delle iterate di g e' definita da

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Un punto $\ell \in A$ e' fisso per g se $g(\ell) = \ell$.

Se $x_n \rightarrow \ell$ e g e' continua in ℓ , passando al limite nella ricorrenza si ottiene necessariamente $\ell = g(\ell)$. Risolvere l'equazione dei punti fissi individua quindi soltanto i possibili limiti, non dimostra la convergenza.

Teorema – Iterazione contrattiva (Teo. 17.2)

Sia $I = [a, b]$, sia $g : I \rightarrow I$ e supponiamo che esista $q \in [0, 1)$ tale che

$$|g(x) - g(y)| \leq q |x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

Allora g ha un unico punto fisso $\ell \in I$ e, per ogni $x_0 \in I$, le iterate convergono a ℓ . Inoltre

$$|x_n - \ell| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

La stima segue sommando $|x_{k+1} - x_k| \leq q^k |x_1 - x_0|$; rende (x_n) di Cauchy. L'unicita' segue da $|\ell_1 - \ell_2| \leq q |\ell_1 - \ell_2|$.

Metodo di Erone per la radice quadrata

Per $a > 0$ il metodo di Erone usa

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_0 > 0.$$

Proposizione – Convergenza del metodo di Erone (Prop. 17.3)

La successione di Erone converge a $\sqrt{a}$. Dal primo passo in poi vale $x_n \geq \sqrt{a}$ e la successione e' decrescente.

Infatti la disuguaglianza aritmetico-geometrica da' $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$. Se $x_n \geq \sqrt{a}$, allora

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0.$$

La successione e' dunque convergente; il limite positivo soddisfa $\ell = (\ell + a/\ell)/2$, quindi $\ell = \sqrt{a}$.

Esercizio Svolto

Per approssimare $\sqrt{2}$ scegliamo $x_0 = 1$. Si ottiene

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{17}{12}, \quad x_3 = \frac{577}{408} \approx 1.414216.$$

Gia' la terza iterazione coincide con $\sqrt{2}$ alle prime cinque cifre decimali.

Modello logistico di crescita di popolazione

Definizione – Ricorrenza logistica (Def. 17.4)

Un modello discreto con capacita' portante $K > 0$ e tasso $r > 0$ e'

$$x_{n+1} = x_n + rx_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right).$$

I punti fissi sono 0 e K .

Se $0 < x_n < K$, l'incremento e' positivo. Per concludere che la popolazione converge a K occorre anche verificare che l'intervallo scelto sia invariato; questa proprieta' dipende dal parametro r . Per tassi elevati possono comparire oscillazioni, quindi il solo calcolo dei punti fissi non basta.

Proposizione – Caso monotono (Prop. 17.5)

Se $0 < r \leq 1$ e $0 < x_0 < K$, allora $0 < x_n < K$, la successione e' crescente e $x_n \rightarrow K$.

Ponendo $y_n = x_n/K$, per $0 < y_n < 1$ si ha $y_{n+1} = y_n[1 + r(1 - y_n)] < 1$ quando $r \leq 1$. La monotonia e la limitatezza danno la convergenza; il limite non puo' essere 0.

La successione di Fibonacci

Definizione – Successione di Fibonacci (Def. 17.6)

La successione di Fibonacci e' definita da

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Per $n \geq 1$ poniamo $q_n = F_{n+1}/F_n$. Allora

$$q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n}.$$

Se (q_n) converge a un limite positivo φ , esso soddisfa $\varphi = 1 + 1/\varphi$, dunque

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

La convergenza si puo' provare osservando che le sottosuccessioni pari e dispari sono monotone, limitate e hanno lo stesso limite.

Nota Formula chiusa

Con $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ e $\psi = (1 - \sqrt{5})/2$ vale

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

La formula si verifica sui primi due termini e conserva la ricorrenza.