

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 2: Funzioni

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Coppie ordinate · Relazioni · Funzioni · Iniettività · Inverse

Indice

1	Coppie ordinate e prodotto cartesiano	1
2	Relazioni	1
3	Definizione di funzione	2
4	Immagine, controimmagine e restrizione	2
5	Funzioni iniettive, suriettive e bigettive	3
6	Composizione	4
7	Funzioni invertibili	5

Copie ordinate e prodotto cartesiano

Definizione Coppia ordinata

Dati due insiemi x, y , la coppia ordinata è definita da

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

La sua proprietà caratteristica è

$$(x, y) = (a, b) \iff x = a \wedge y = b.$$

Nota Ordine dei termini

La coppia ordinata tiene conto dell'ordine: se $x \neq y$, allora $(x, y) \neq (y, x)$. Questo la distingue dalla coppia non ordinata $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Definizione Prodotto cartesiano

Dati insiemi A e B , il prodotto cartesiano è

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Esercizio Svolto

Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$, allora

$$A \times B = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}.$$

Relazioni

Definizione Relazione

Una relazione tra A e B è un sottoinsieme $R \subset A \times B$. Se $(x, y) \in R$, si dice che x è in relazione con y .

Una relazione tra A e A si chiama relazione binaria su A .

Definizione Dominio di una relazione

Il dominio della relazione $R \subset A \times B$ è

$$\text{dom}(R) = \{x \in A : \exists y \in B \text{ con } (x, y) \in R\}.$$

Nota Grafo orientato

Un grafo orientato è una coppia (V, E) con $E \subset V \times V$. Gli elementi di V sono i vertici e gli elementi di E sono gli archi orientati.

Definizione di funzione

Definizione Funzione

Una funzione $f : A \rightarrow B$ associa a ogni $x \in A$ uno e un solo elemento $f(x) \in B$. Formalmente una funzione è una terna (A, B, R) , dove $R \subset A \times B$ è una relazione funzionale:

$$\forall x \in A \exists! y \in B : (x, y) \in R.$$

L'insieme A è il dominio, B è il codominio. Il grafico della funzione è

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Nota Dominio naturale

Quando una funzione reale è data solo tramite la sua legge, per esempio $f(x) = \sqrt{x-1}$, il dominio naturale è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui la formula ha senso. In questo caso è $[1, +\infty)$.

Definizione Identità e inclusione canonica

La funzione identità su A è

$$i_A : A \rightarrow A, \quad i_A(x) = x.$$

Se $X \subset A$, l'inclusione canonica è

$$j_X : X \rightarrow A, \quad j_X(x) = x.$$

Immagine, controimmagine e restrizione

Definizione Immagine e controimmagine

Sia $f : A \rightarrow B$, con $X \subset A$ e $Y \subset B$. Si definiscono:

$$f(X) = \{y \in B : \exists x \in X \text{ con } f(x) = y\},$$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

L'insieme $f(A)$ si chiama immagine della funzione.

Nota Notazione

La scrittura $f^{-1}(Y)$ indica la controimmagine di Y e ha senso per ogni funzione. Non richiede che f sia invertibile.

Teorema Proprietà di immagine e controimmagine

Siano $X_1, X_2 \subset A$ e $Y_1, Y_2 \subset B$. Allora:

$$X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2),$$

$$\begin{aligned} Y_1 \subset Y_2 &\Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2), \\ f(X_1 \cup X_2) &= f(X_1) \cup f(X_2), \\ f(X_1 \cap X_2) &\subset f(X_1) \cap f(X_2), \\ f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) &= f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2), \\ f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &= f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2). \end{aligned}$$

Definizione Restrizione

Se $X \subset A$, la restrizione di $f : A \rightarrow B$ a X è

$$f|_X : X \rightarrow B, \quad f|_X(x) = f(x).$$

Definizione Famiglia indicizzata

Una funzione $a : I \rightarrow A$ si chiama famiglia di elementi di A indicizzata da I e si scrive $(a_i)_{i \in I}$.

Una funzione $A : I \rightarrow \mathcal{P}(X)$ si chiama famiglia di parti di X e si scrive $(A_i)_{i \in I}$.

Funzioni iniettive, suriettive e bigettive

Definizione Iniettiva

Una funzione $f : A \rightarrow B$ è iniettiva se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Equivalentemente:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definizione Suriettiva

Una funzione $f : A \rightarrow B$ è suriettiva se ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio:

$$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y.$$

Equivalentemente, $f(A) = B$.

Definizione Bigettiva

Una funzione è bigettiva se è sia iniettiva sia suriettiva:

$$\forall y \in B \exists! x \in A : f(x) = y.$$

Nota Lettura tramite equazioni

Per $y \in B$, l'equazione

$$f(x) = y$$

ha:

- al piu' una soluzione per ogni y se f e' iniettiva;
- almeno una soluzione per ogni y se f e' suriettiva;
- esattamente una soluzione per ogni y se f e' bigettiva.

Esercizio Svolto

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, non e' suriettiva perche' nessun $y < 1$ e' assunto. Non e' iniettiva perche' $f(1) = f(-1)$.

La stessa legge, ristretta a $[0, +\infty)$ e con codominio $[1, +\infty)$, diventa bigettiva.

Composizione

Definizione Funzione composta

Date $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, la composta $g \circ f : A \rightarrow C$ e' definita da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Teorema Proprieta' della composizione

Se $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$, allora

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Inoltre

$$i_B \circ f = f, \quad f \circ i_A = f.$$

Nota Non commutativita'

In generale $g \circ f \neq f \circ g$. Per esempio, con $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$:

$$(g \circ f)(x) = \sin^2 x, \quad (f \circ g)(x) = \sin(x^2).$$

Funzioni invertibili

Teorema Invertibilita' e bigettivita'

Una funzione $f : A \rightarrow B$ e' bigettiva se e solo se esiste una funzione $g : B \rightarrow A$ tale che

$$g \circ f = i_A, \quad f \circ g = i_B.$$

In tal caso g e' unica, si chiama inversa di f e si denota con f^{-1} .

Dimostrazione

Se f e' bigettiva, per ogni $y \in B$ l'equazione $f(x) = y$ ha un'unica soluzione. Definiamo $g(y)$ come tale soluzione. Allora $f(g(y)) = y$ e $g(f(x)) = x$, quindi $f \circ g = i_B$ e $g \circ f = i_A$.

Viceversa, se esiste g con queste proprieta', da $f(g(y)) = y$ segue che ogni $y \in B$ e' raggiunto: f e' suriettiva. Inoltre, se $f(x_1) = f(x_2)$, allora $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, dunque $x_1 = x_2$: f e' iniettiva. $\square$

Nota Come trovare l'inversa

Per trovare f^{-1} si risolve l'equazione $f(x) = y$ rispetto a x . Per esempio, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) = x^3 + 7$, allora

$$x^3 + 7 = y \iff x = \sqrt[3]{y - 7},$$

quindi

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 7}.$$

Teorema Inversa della composta

Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ sono bigettive, allora $g \circ f$ e' bigettiva e

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Definizione Inversa su immagine

Se $f : A \rightarrow B$ e' iniettiva, allora e' invertibile come funzione

$$f : A \rightarrow f(A).$$

In questo senso si definisce

$$f^{-1} : f(A) \rightarrow A.$$