

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 22: Funzioni convesse

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Corde · Derivate monotone · Disuguaglianze · Ottimizzazione

Indice

1	Introduzione: disuguaglianza geometrico-aritmetica	1
2	Definizione e principali proprietà	1
3	Ulteriori proprietà delle funzioni convesse	2
4	Come riconoscere convessità e concavità	2
5	Funzioni convesse e disuguaglianze	3
6	Ottimizzazione convessa	3
7	Complementi: funzioni convesse e insiemi convessi	3

Introduzione: disuguaglianza geometrico-aritmetica

Per $a, b > 0$,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

perché $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$. La disuguaglianza confronta il valore di una funzione in una media con la media dei suoi valori. Questo è il meccanismo fondamentale della convessità.

Teorema – Disuguaglianza geometrico-aritmetica (Teo. 22.1)

Per $x_1, \dots, x_n > 0$,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = \cdots = x_n$.

Definizione e principali proprietà

Definizione – Funzione convessa (Def. 22.2)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se per ogni $x, y \in I$ e $\lambda \in [0, 1]$ vale

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

È strettamente convessa se la disuguaglianza è stretta quando $x \neq y$ e $\lambda \in (0, 1)$.
È concava se $-f$ è convessa.

Il grafico di una funzione convessa sta sotto ogni sua corda. Le funzioni affini sono contemporaneamente convesse e concave.

Proposizione – Operazioni che preservano la convessità (Prop. 22.3)

Se f e g sono convesse su I e $\alpha, \beta \geq 0$, allora $\alpha f + \beta g$ è convessa. Se g è convessa e non decrescente su un intervallo contenente $f(I)$, e f è convessa, allora $g \circ f$ è convessa.

Proposizione – Pendenze delle corde (Prop. 22.4)

Se f è convessa e $x_1 < x_2 < x_3$ in I , allora

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Ulteriori proprietà delle funzioni convesse

Teorema – Regolarità interna (Teo. 22.5)

Una funzione convessa su un intervallo aperto è continua. In ogni punto interno esistono le derivate laterali, eventualmente infinite, e

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

Le due funzioni f'_- e f'_+ sono non decrescenti.

La convessità non garantisce derivabilità: $f(x) = |x|$ è convessa ma ha un punto angoloso in 0. I punti di non derivabilità interni sono al più numerabili; la convessità garantisce infatti che le pendenze non diminuiscano.

Teorema – Retta di supporto (Teo. 22.6)

Se f è convessa su I e derivabile in $x_0 \in I^\circ$, allora

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I.$$

Quindi il grafico sta sopra ogni sua retta tangente.

Come riconoscere convessità e concavità

Teorema – Criterio della derivata prima (Teo. 22.7)

Sia f derivabile su un intervallo aperto I . Allora f è convessa su I se e solo se f' è non decrescente. È strettamente convessa se f' è strettamente crescente.

Teorema – Criterio della derivata seconda (Teo. 22.8)

Se f è due volte derivabile su un intervallo I , allora

$$f \text{ convessa} \iff f'' \geq 0 \text{ su } I, \quad f \text{ concava} \iff f'' \leq 0 \text{ su } I.$$

Se la disuguaglianza è stretta, la convessità o concavità è stretta.

Esercizio Svolto

Per $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, dunque f è convessa su $\mathbb{R}$. È strettamente convessa anche se $f''(0) = 0$: la condizione $f'' > 0$ è sufficiente, non necessaria.

Funzioni convesse e disuguaglianze

Teorema – Disuguaglianza di Jensen (Teo. 22.9)

Se f e' convessa su I , $x_1, \dots, x_n \in I$ e $\lambda_i \geq 0$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, allora

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Se f e' strettamente convessa e tutti i pesi sono positivi, l'uguaglianza richiede $x_1 = \dots = x_n$.

Applicando Jensen alla funzione convessa $f(x) = -\ln x$ con pesi uguali si ritrova la disuguaglianza geometrico-aritmetica. La retta di supporto di e^x in 0 fornisce invece $e^x \geq 1 + x$.

Ottimizzazione convessa

Teorema – Minimi di funzioni convesse (Teo. 22.10)

Ogni minimo locale di una funzione convessa su un intervallo e' globale. L'insieme dei punti di minimo e' un intervallo. Se la funzione e' strettamente convessa, il minimo, quando esiste, e' unico.

Proposizione – Condizione del primo ordine (Prop. 22.11)

Se f e' convessa e derivabile, x_0 e' punto di minimo globale se e solo se $f'(x_0) = 0$, quando x_0 e' interno al dominio. Piu' in generale, per una funzione non derivabile basta $f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$.

Per $f(x) = x^2 - 4x + 5$ si ha $f'' = 2 > 0$ e $f'(x) = 2x - 4$. L'unico punto critico e' $x = 2$, dunque e' l'unico minimo globale e $f(2) = 1$.

Complementi: funzioni convesse e insiemi convessi

Definizione – Insieme convesso ed epigrafo (Def. 22.12)

Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ e' convesso se contiene il segmento che unisce ogni coppia di suoi punti. L'epigrafo di $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e'

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}.$$

Teorema – Caratterizzazione tramite epigrafo (Teo. 22.13)

Una funzione f e' convessa se e solo se il suo epigrafo e' un insieme convesso.

La caratterizzazione traduce una disuguaglianza tra valori della funzione in una proprietà geometrica del sottoinsieme del piano posto sopra il grafico.