

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 24: Teoremi di Cauchy e de l'Hopital

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Valor medio di Cauchy · Forme $0/0$ e ∞/∞ · Ipotesi · Esempi

Indice

1	Teorema del valor medio di Cauchy	1
2	Regola di de l'Hopital nella forma $0/0$	1
3	Regola nella forma con denominatore infinito	2
4	Applicazioni ed esercizi	3

Teorema del valor medio di Cauchy

Teorema – Teorema di Cauchy (Teo. 24.1)

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue su $[a, b]$ e derivabili su (a, b) . Se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora $g(a) \neq g(b)$ ed esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dimostrazione

Se $g(a) = g(b)$, Rolle darebbe un punto in cui $g' = 0$. Definiamo

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Si verifica che $h(a) = h(b)$; per Rolle esiste $c \in (a, b)$ con

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c).$$

Poiché i due denominatori sono non nulli, la tesi segue dividendo. $\square$

Per $g(x) = x$ si ritrova il teorema di Lagrange. L'ipotesi $g' \neq 0$ serve anche a rendere ben definito il rapporto degli incrementi.

Regola di de l'Hopital nella forma 0/0

Nel seguito I è un intervallo, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è punto di accumulazione di I e $I_{x_0} = I \setminus \{x_0\}$, con l'ovvia interpretazione se $x_0 = \pm\infty$.

Teorema – de l'Hopital, caso 0/0 (Teo. 24.2)

Siano $f, g : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_{x_0},$$

e che esista

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

La stessa affermazione vale per limiti destri o sinistri, restringendo I al lato considerato.

Dimostrazione

Supponiamo prima $x_0 \in \mathbb{R}$. Prolunghiamo f e g ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Per ogni $x \neq x_0$, Cauchy applicato all'intervallo con estremi x e x_0 fornisce un punto c_x tra essi tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Inoltre $g(x) \neq 0$ e $c_x \rightarrow x_0$ quando $x \rightarrow x_0$; il limite segue per composizione. Se $x_0 = +\infty$, si applica il caso precedente a $F(t) = f(1/t)$ e $G(t) = g(1/t)$ per $t \rightarrow 0^+$; i fattori $-1/t^2$ si cancellano nel rapporto delle derivate. Il caso $-\infty$ e' analogo. $\square$

Regola nella forma con denominatore infinito

Teorema – de l'Hopital, caso $\cdot/\infty$ (Teo. 24.3)

Siano $f, g : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili e supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty, \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_{x_0},$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora g e' definitivamente non nulla e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

In particolare il teorema copre la forma ∞/∞ , ma non richiede che f diverga.

Nota Uso corretto

La regola non afferma che i due rapporti abbiano sempre lo stesso comportamento. Prima si verificano la forma indeterminata, la derivabilita' e $g' \neq 0$; poi deve esistere il limite del rapporto delle derivate. Se quest'ultimo non esiste, il limite originale puo' comunque esistere.

Per esempio,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sin x}{2x + \sin x} = 1,$$

mentre $(2 - \cos x)/(2 + \cos x)$ non ha limite. Quindi de l'Hopital non e' utilizzabile in questo caso.

Applicazioni ed esercizi

Esercizio Svolto

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

E' una forma $0/0$. Due applicazioni lecite della regola danno

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ad ogni passaggio il denominatore derivato e' non nullo in un intorno bucato di zero e il limite finale esiste.

Esercizio Svolto

Per $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Si ritrova cosi' il fatto che ogni potenza positiva domina il logaritmo.