

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 25: Formula di Taylor

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Approssimazioni locali · Resto di Peano · MacLaurin · Operazioni

Indice

1	Approssimazioni polinomiali locali	1
2	Formula di Taylor con resto di Peano	1
3	Sviluppi di MacLaurin fondamentali	2
4	Operazioni e proprietà dell' o piccolo	2

Approssimazioni polinomiali locali

Fissati x_0 e un ordine n , cerchiamo un polinomio p di grado al più n per cui l'errore sia trascurabile rispetto a $(x - x_0)^n$:

$$f(x) - p(x) = o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Un tale polinomio, se esiste, è unico: la differenza di due candidati è un polinomio di grado al più n che, diviso per $(x - x_0)^n$, tende a zero; annullando successivamente i coefficienti dal grado zero al grado n , il polinomio deve essere identicamente nullo.

Definizione – Polinomio di Taylor (Def. 25.1)

Sia I un intervallo proprio, $x_0 \in I$ e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 . Il polinomio di Taylor di ordine n , centrato in x_0 , è

$$P_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

La differenza $E_n(x) = f(x) - P_n[f, x_0](x)$ è il resto. Per $x_0 = 0$ si parla di polinomio di MacLaurin.

Proposizione – Caratterizzazione (Prop. 25.2)

$P_n[f, x_0]$ è l'unico polinomio p di grado al più n tale che

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \dots, n.$$

Infatti, scrivendo $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x - x_0)^j$, si ha $p^{(k)}(x_0) = k! a_k$, che determina tutti i coefficienti.

Formula di Taylor con resto di Peano

Teorema – Formula di Taylor-Peano (Teo. 25.3)

Sia I un intervallo proprio, $x_0 \in I$ e $n \geq 1$. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile $n - 1$ volte su I e $f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0 , allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Il polinomio scritto è l'unico di grado al più n con questa proprietà.

Dimostrazione

Posto $E_n = f - P_n$, per la caratterizzazione precedente $E_n^{(k)}(x_0) = 0$ per $k = 0, \dots, n$. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n}$$

e' della forma $0/0$. Applicando de l'Hopital $n - 1$ volte si arriva a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = 0,$$

che e' il rapporto incrementale di $E_n^{(n-1)}$ in x_0 , diviso per il fattoriale di n , e tende a $E_n^{(n)}(x_0)/(n!) = 0$. Risalendo, il limite iniziale e' zero. L'unicita' segue dall'osservazione iniziale. $\square$

Sviluppi di MacLaurin fondamentali

Per $x \rightarrow 0$ valgono, agli ordini indicati,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}.$$

Operazioni e proprieta' dell'o piccolo

Definizione – Simbolo o piccolo (Def. 25.4)

Siano $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di A . Se v e' non nulla in un intorno bucato di x_0 , si scrive

$$u = o(v) \quad (x \rightarrow x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

Valgono le regole

$$o((x-x_0)^r) + o((x-x_0)^s) = o((x-x_0)^{\min\{r,s\}}),$$

$$o((x-x_0)^r) o((x-x_0)^s) = o((x-x_0)^{r+s}),$$

e il prodotto di $o((x-x_0)^r)$ per una funzione limitata vicino a x_0 resta $o((x-x_0)^r)$.

Proposizione – Operazioni sui polinomi di Taylor (Prop. 25.5)

Supponiamo noti fino all'ordine n gli sviluppi di f e g nel centro x_0 . Il polinomio di Taylor della somma e' la somma dei polinomi; quello di λf e' $\lambda P_n[f, x_0]$. Per il prodotto si moltiplicano i due sviluppi e si eliminano i termini di grado superiore a n .

Per la composizione, sia $g(x_0) = y_0$, sia noto lo sviluppo di f nel centro y_0 e supponiamo $g(x) - y_0 = O(x - x_0)$. Si sostituisce lo sviluppo di g in quello di f e si conservano soltanto le potenze di $x - x_0$ fino al grado n ; il resto ottenuto e' $o((x - x_0)^n)$.

Il troncamento e' essenziale: termini non noti del resto possono contribuire agli ordini successivi, quindi non si possono conservare coefficienti oltre l'ordine giustificato dagli sviluppi disponibili.

Esercizio Svolto

Troviamo lo sviluppo di $e^x \cos x$ fino all'ordine tre:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Moltiplicando e troncando,

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Il termine quadratico si cancella.