

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 26: Applicazioni della formula di Taylor

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Punti critici · Principio di sostituzione · Limiti · Equivalenti

Indice

1	Classificazione dei punti critici	1
2	Funzioni trascurabili e asintotiche	1
3	Il primo termine non nullo	2
4	Metodo per il calcolo dei limiti	2

Classificazione dei punti critici

Teorema – Test della prima derivata non nulla (Teo. 26.1)

Sia I un intervallo, $x_0 \in I^\circ$ e $n \geq 2$. Supponiamo che f sia derivabile $n - 1$ volte su I , n volte in x_0 , e

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Se n e' pari, x_0 e' un minimo locale proprio quando $f^{(n)}(x_0) > 0$ e un massimo locale proprio quando $f^{(n)}(x_0) < 0$. Se n e' dispari, x_0 non e' un estremo locale.

Dimostrazione

Taylor-Peano da'

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Dividendo per $(x - x_0)^n$, il rapporto tende al coefficiente non nullo $f^{(n)}(x_0)/n!$ e ne conserva definitivamente il segno. Se n e' pari, la potenza ha lo stesso segno sui due lati; se n e' dispari, cambia segno. $\square$

Per $f(x) = x \sin x + \cos(2x)$ si ha $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -2 < 0$: quindi 0 e' un massimo locale, senza dover studiare il segno della complicata derivata prima.

Funzioni trascurabili e asintotiche

Definizione – Trascurabile e asintotica (Def. 26.2)

Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di A . Si dice che $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ se $f = \sigma g$ definitivamente, con $\sigma(x) \rightarrow 0$. Si dice che $f \sim g$ se $f = \sigma g$ definitivamente, con $\sigma(x) \rightarrow 1$. Quando g e' definitivamente non nulla, cio' equivale a

$$\frac{f}{g} \rightarrow 0, \quad \text{rispettivamente} \quad \frac{f}{g} \rightarrow 1.$$

In particolare $f \sim g$ equivale a $f = g + o(g)$. L'equivalenza e' simmetrica e si conserva per prodotti e quozienti, quando definiti.

Teorema – Principio di sostituzione (Teo. 26.3)

Supponiamo che $f \sim \hat{f}$ e $g \sim \hat{g}$ per $x \rightarrow x_0$. Allora, dove i rapporti sono definiti,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)}.$$

Piu' precisamente, se $r = o(f)$ e $s = o(g)$, allora

$$\frac{f + r}{g + s} \sim \frac{f}{g}.$$

Quindi i termini trascurabili si possono eliminare in prodotti e rapporti prima di calcolare il limite.

Nota Le somme richiedono cautela

Da $f \sim \hat{f}$ e $g \sim \hat{g}$ non segue in generale $f + g \sim \hat{f} + \hat{g}$: i termini principali possono cancellarsi. Per esempio $\sin x \sim x$, ma $x - \sin x$ non è asintotico a $x - x = 0$; occorre sviluppare fino al primo ordine che non si annulla.

Il primo termine non nullo

Proposizione – Equivalente di Taylor (Prop. 26.4)

Sia f derivabile quanto occorre in x_0 e sia n il primo indice per cui $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora

$$f(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (x \rightarrow x_0).$$

Dimostrazione

Il polinomio di Taylor fino all'ordine n ha un solo termine non nullo. Pertanto

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

e il rapporto tra i due membri principali tende a uno. □

Se f e g si annullano rispettivamente agli ordini n e m , allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f^{(n)}(x_0)n!}{g^{(m)}(x_0)m!}(x - x_0)^{n-m}.$$

Il limite si legge quindi confrontando gli ordini di annullamento.

Metodo per il calcolo dei limiti

Procedura Limiti mediante Taylor

1. Portare l'argomento degli sviluppi al centro noto, di solito zero.
2. Sviluppare numeratore e denominatore solo fino al primo ordine che sopravvive alle cancellazioni.
3. Comporre e moltiplicare gli sviluppi troncando all'ordine giustificato.
4. Sostituire ciascuna espressione col primo termine non nullo e calcolare il limite risultante.
5. Se tutti i termini calcolati si cancellano, aumentare l'ordine: non si può concludere da un resto troppo grossolano.

Esercizio Svolto

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}.$$

Poiche'

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x^2 \sin x = x^3 + o(x^3),$$

il principio di sostituzione fornisce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} = -\frac{1}{6}.$$

Esercizio Svolto

Per classificare $f(x) = \cos x - 1 + x^2/2$ in zero, sviluppiamo

$$f(x) = \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

La prima derivata non nulla e' di ordine quattro e ha coefficiente positivo: 0 e' quindi un minimo locale proprio.