

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 27: Serie di Taylor

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Serie di potenze · Resto di Lagrange · Convergenza · Funzioni analitiche

Indice

1	Dalla formula finita alla serie di Taylor	1
2	Una serie convergente alla funzione sbagliata	1
3	Formula di Taylor con resto di Lagrange	2
4	Criterio di convergenza alla funzione	2
5	Esponenziale, seno e coseno	3

Dalla formula finita alla serie di Taylor

Per una funzione derivabile quanto occorre, la formula di Taylor di ordine n nel centro x_0 scrive

$$f(x) = P_n[f, x_0](x) + E_n(x), \quad P_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Qui n è fissato e l'affermazione di Taylor-Peano descrive l'errore quando $x \rightarrow x_0$. La serie di Taylor riguarda invece un problema diverso: si fissa x e si lascia tendere l'ordine n a infinito.

Definizione – Serie di Taylor (Def. 27.1)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $x_0 \in I$ e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile infinite volte. La serie di Taylor di f centrata in x_0 è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Se $x_0 = 0$ si chiama serie di MacLaurin. La funzione f è sviluppabile in serie di Taylor su $J \subseteq I$ se, per ogni $x \in J$, la serie converge e la sua somma è precisamente $f(x)$.

Proposizione – Resto e somma della serie (Prop. 27.2)

Fissato $x \in I$, la serie di Taylor converge a $f(x)$ se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x) - P_n[f, x_0](x)] = 0.$$

La sola esistenza di tutte le derivate non garantisce né la convergenza della serie né l'uguaglianza della sua somma con la funzione.

Per esempio, per $f(x) = 1/(1+x)$ si ha

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

Il resto tende a zero per $|x| < 1$, mentre per $|x| \geq 1$ il termine generale della serie non tende a zero. La funzione è dunque definita anche fuori da $(-1, 1)$, ma la sua serie di MacLaurin non vi converge.

Una serie convergente alla funzione sbagliata

Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Per $x \neq 0$, ogni derivata è della forma $P_n(1/x)e^{-1/x^2}$, con P_n polinomio. Poiché ogni potenza di $1/x$ è dominata da e^{1/x^2} quando $x \rightarrow 0$, tali espressioni tendono a zero. Per

induzione sul rapporto incrementale segue che f è derivabile infinite volte e

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La serie di MacLaurin è quindi la serie identicamente nulla: converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma coincide con $f(x)$ soltanto in $x = 0$. Una funzione infinitamente derivabile non è necessariamente determinata dai valori delle sue derivate in un punto.

Formula di Taylor con resto di Lagrange

Teorema – Resto di Lagrange (Teo. 27.3)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $f \in C^n(I)$ e che f sia derivabile $n + 1$ volte in $I \setminus \{x_0\}$. Allora, per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, esiste un punto c strettamente compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Il punto c può dipendere sia da x sia da n .

Dimostrazione

Fissato $x \neq x_0$, poniamo $E_n = f - P_n[f, x_0]$ e consideriamo

$$F(t) = E_n(t) - E_n(x) \left(\frac{t - x_0}{x - x_0} \right)^{n+1}.$$

Si ha $F(x) = F(x_0) = 0$ e $F^{(k)}(x_0) = 0$ per $k = 1, \dots, n$. Applicando Rolle ripetutamente agli intervalli compresi tra x_0 e x , si ottiene un c interno con $F^{(n+1)}(c) = 0$. Poiché la derivata di ordine $n + 1$ di P_n è nulla, questa uguaglianza fornisce

$$f^{(n+1)}(c) - E_n(x) \frac{(n+1)!}{(x - x_0)^{n+1}} = 0,$$

da cui segue la formula. □

Per $n = 0$ il teorema diventa $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$: è esattamente il teorema di Lagrange.

Criterio di convergenza alla funzione

Proposizione – Criterio mediante le derivate (Prop. 27.4)

Sia $f \in C^\infty(I)$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che, per ogni $x \in I$, esista una costante $M_x \geq 0$ tale che

$$|f^{(k)}(t)| \leq M_x$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni t compreso tra x_0 e x . Allora la serie di Taylor centrata in x_0 converge a $f(x)$ per ogni $x \in I$.

Dimostrazione

Il resto di Lagrange soddisfa

$$|E_n(x)| \leq M_x \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Per x fissato il membro destro tende a zero, perché il fattoriale domina ogni potenza. La Proposizione 27.2 conclude. $\square$

Il criterio è sufficiente, non necessario. Più in generale basta riuscire a provare direttamente che la maggiorazione del resto di Lagrange tende a zero; la costante può quindi essere sostituita da stime più fini dipendenti dall'ordine.

Esponenziale, seno e coseno

Proposizione – Sviluppi globali fondamentali (Prop. 27.5)

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Queste serie di MacLaurin convergono alle rispettive funzioni su tutta $\mathbb{R}$.

Infatti le derivate di seno e coseno hanno modulo al più uno. Per $f(x) = e^x$, se t è compreso tra 0 e x , allora $e^t \leq e^{|x|}$; il criterio precedente si applica con $M_x = e^{|x|}$.

Esercizio Svolto

Poniamo

$$S_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{1}{(2k)!}.$$

Questo è il polinomio di MacLaurin di $\cos x$ di ordine $2N+1$ valutato in $x=1$. Il resto di Lagrange e la limitatezza delle derivate di $\cos$ danno

$$|\cos 1 - S_N| \leq \frac{1}{(2N+2)!}.$$

Quindi $S_N \rightarrow \cos 1$ e, per esempio, $S_2 = 1 - 1/2! + 1/4! = 13/24$ approssima $\cos 1$ con errore non superiore a $1/6!$.