

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 28: Misura di Peano-Jordan

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Insiemi contigui · Polirettangoli · Misure interna ed esterna · Misurabilit 

Indice

1	Richiamo sugli insiemi contigui	1
2	Rettangoli cartesiani e loro area	1
3	Polirettangoli	2
4	Misure interna ed esterna	3
5	Proprieta' elementari ed esempio	4

Richiamo sugli insiemi contigui

Definizione – Insiemi separati e contigui (Def. 28.1)

Due insiemi non vuoti $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono separati, e si scrive $A \leq B$, se

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

In tal caso A è limitato superiormente, B è limitato inferiormente e $\sup A \leq \inf B$. Ogni $\lambda \in [\sup A, \inf B]$ è un elemento di separazione. Gli insiemi sono contigui se $\sup A = \inf B$.

Proposizione – Caratterizzazione della contiguità (Prop. 28.2)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e separati. Sono equivalenti:

- (i) $\sup A = \inf B$;
- (ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$.

Dimostrazione

Se il valore comune è s , le proprietà caratteristiche di estremo superiore e inferiore forniscono $a > s - \varepsilon/2$ e $b < s + \varepsilon/2$, dunque $b - a < \varepsilon$. Viceversa, posto $d = \inf B - \sup A \geq 0$, da $a \leq \sup A$ e $\inf B \leq b$ segue $d \leq b - a$. La seconda condizione esclude $d > 0$. $\square$

Rettangoli cartesiani e loro area

Definizione – Rettangolo cartesiano (Def. 28.3)

Un rettangolo cartesiano è un insieme $R = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$, dove I e J sono intervalli limitati, anche aperti, chiusi, semiaperti o degeneri. Indichiamo con $\mathcal{R}_2$ la famiglia di tali rettangoli e includiamo $\emptyset$ in $\mathcal{R}_2$.

Proposizione – Operazioni sui rettangoli (Prop. 28.4)

Se $R_1, R_2 \in \mathcal{R}_2$, allora $R_1 \cap R_2 \in \mathcal{R}_2$. Se $R_1 \subseteq R_2$, la differenza $R_2 \setminus R_1$ è unione di un numero finito di rettangoli cartesiani a due a due disgiunti.

La seconda affermazione si ottiene tagliando R_2 lungo le rette che contengono i lati di R_1 ; la possibilità di usare intervalli semiaperti permette di assegnare ciascun bordo a un solo pezzo.

Definizione – Misura di un rettangolo (Def. 28.5)

Se $R = I \times J$ e

$$a = \inf I, \quad b = \sup I, \quad c = \inf J, \quad d = \sup J,$$

si definisce

$$m(R) = |I| |J| = (b - a)(d - c), \quad m(\emptyset) = 0.$$

La misura non dipende dalla scelta di includere o escludere i lati.

Proposizione – Additivita' finita sui rettangoli (Prop. 28.6)

La misura dei rettangoli e' non negativa. Se $R, R_1, \dots, R_n \in \mathcal{R}_2$, i rettangoli R_i sono a due a due disgiunti e $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$, allora

$$m(R) = \sum_{i=1}^n m(R_i).$$

La formula segue introducendo tutte le rette verticali e orizzontali che contengono i lati dei rettangoli: si ottiene una griglia finita di celle disgiunte e la somma delle aree si riduce alla distributivita' del prodotto.

Polirettangoli

Definizione – Polirettangolo cartesiano (Def. 28.7)

Un polirettangolo e' un'unione finita di rettangoli cartesiani a due a due disgiunti:

$$E = R_1 \cup \dots \cup R_n, \quad R_i \in \mathcal{R}_2, \quad R_i \cap R_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

La famiglia dei polirettangoli si indica con $\mathcal{P}_2$.

Proposizione – Algebra dei polirettangoli (Prop. 28.8)

Se $E, F \in \mathcal{P}_2$, allora

$$E \cup F, \quad E \cap F, \quad E \setminus F$$

appartengono a $\mathcal{P}_2$. In particolare $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{P}_2$ e $\emptyset \in \mathcal{P}_2$.

Proposizione – Misura dei polirettangoli (Prop. 28.9)

Se $E = \bigcup_{i=1}^n R_i$ e' una decomposizione disgiunta, si pone

$$m(E) = \sum_{i=1}^n m(R_i).$$

La definizione non dipende dalla decomposizione scelta. Inoltre, per $E, F \in \mathcal{P}_2$:

- (i) $m(E) \geq 0$ e $m(\emptyset) = 0$;
- (ii) $E \subseteq F$ implica $m(E) \leq m(F)$;
- (iii) se $E \cap F = \emptyset$, allora $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$.

Per verificare la buona definizione si sovrappongono due decomposizioni: gli insiemi $R_i \cap S_j$ formano una raffinazione rettangolare comune. L'addittivita' finita sui rettangoli mostra che le due somme delle aree coincidono.

Misure interna ed esterna

Definizione – Misure interna ed esterna (Def. 28.10)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Consideriamo i due insiemi numerici

$$\mathcal{M}_X^- = \{m(E) : E \in \mathcal{P}_2, E \subseteq X\}, \quad \mathcal{M}_X^+ = \{m(F) : F \in \mathcal{P}_2, X \subseteq F\}.$$

Essi sono non vuoti: il vuoto e' un'approssimazione interna e un rettangolo limitato contenente X e' un'approssimazione esterna. Si definiscono

$$m_*(X) = \sup \mathcal{M}_X^-, \quad m^*(X) = \inf \mathcal{M}_X^+.$$

Sono dette rispettivamente misura interna e misura esterna di Peano-Jordan.

Per monotonia, ogni polirettangolo interno ha area non maggiore di ogni polirettangolo esterno. Pertanto $\mathcal{M}_X^- \leq \mathcal{M}_X^+$ e $m_*(X) \leq m^*(X)$.

Definizione – Misurabilita' secondo Peano-Jordan (Def. 28.11)

Un insieme limitato $X \subseteq \mathbb{R}^2$ e' misurabile secondo Peano-Jordan se

$$m_*(X) = m^*(X).$$

Il valore comune si chiama misura, o area, di X e si indica con $m(X)$. Equivalentemente, i due insiemi numerici $\mathcal{M}_X^-$ e $\mathcal{M}_X^+$ sono contigui.

Teorema – Criterio del sandwich (Teo. 28.12)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Sono equivalenti:

- (i) X e' misurabile secondo Peano-Jordan;
- (ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $E, F \in \mathcal{P}_2$ tali che

$$E \subseteq X \subseteq F, \quad m(F) - m(E) < \varepsilon.$$

Dimostrazione

La condizione $E \subseteq X \subseteq F$ implica $m(E) \leq m_*(X) \leq m^*(X) \leq m(F)$. Se le due misure coincidono, le proprieta' caratteristiche di estremo superiore e inferiore permettono di scegliere E e F a distanza minore di $\varepsilon/2$ dal valore comune. Viceversa il sandwich fornisce

$$0 \leq m^*(X) - m_*(X) \leq m(F) - m(E) < \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$, quindi la differenza e' nulla. □

Proprieta' elementari ed esempio

Proposizione – Proprieta' della misura (Prop. 28.13)

I polirettangoli sono misurabili e la nuova misura coincide con quella gia' definita. Se $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ sono limitati e misurabili, allora anche $X \cup Y$, $X \cap Y$ e $X \setminus Y$ sono misurabili. Inoltre:

- (i) $m(\emptyset) = 0$ e $m(X) \geq 0$;
- (ii) se $X \subseteq Y$, allora $m(X) \leq m(Y)$;
- (iii) se $X \cap Y = \emptyset$, allora $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$;
- (iv) in generale, $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y)$.

Le proprieta' si dimostrano scegliendo sandwich interni ed esterni per gli insiemi coinvolti, rendendo arbitrariamente piccola la somma degli scarti, e usando le corrispondenti identita' per i polirettangoli.

Esercizio Svolto

Consideriamo la regione a forma di "L"

$$X = ([0, 1] \times [0, 2]) \cup ((1, 3] \times [0, 1]).$$

I due rettangoli sono disgiunti, quindi X e' un polirettangolo e

$$m(X) = (1 - 0)(2 - 0) + (3 - 1)(1 - 0) = 2 + 2 = 4.$$

Lo stesso risultato si ottiene sottraendo dal rettangolo $[0, 3] \times [0, 2]$, di area 6, il rettangolo $(1, 3] \times (1, 2]$, di area 2.