

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 29: Integrale di Riemann

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Suddivisioni · Somme di Darboux · Integrabilit  · Continuit  uniforme

Indice

1	Suddivisioni, finezza e somme di Darboux	1
2	Definizione e criteri di integrabilit�	1
3	Interpretazione geometrica ed esempi fondamentali	2
4	Additivita' e funzioni monotone	3
5	Continuit� uniforme e oscillazione	4
6	Operazioni e area con segno	5

Suddivisioni, finezza e somme di Darboux

Definizione – Suddivisione e raffinamento (Def. 29.1)

Siano $a < b$. Una suddivisione di $[a, b]$ e' un insieme finito

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

La sua norma o ampiezza e' $\|P\| = \max_i(x_i - x_{i-1})$. Una suddivisione Q e' piu' fine di P se $P \subseteq Q$; $P \cup Q$ e' un raffinamento comune.

Definizione – Somme inferiori e superiori (Def. 29.2)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Per $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ poniamo

$$m_i = \inf_{I_i} f, \quad M_i = \sup_{I_i} f.$$

Le somme di Darboux associate a P sono

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Proposizione – Monotonia rispetto alla finezza (Prop. 29.3)

Se Q e' piu' fine di P , allora

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P).$$

Inoltre, per due suddivisioni qualsiasi P, Q ,

$$s(f, P) \leq S(f, Q).$$

Per provare la prima catena basta aggiungere un punto alla volta: spezzando un intervallo, i nuovi infimi non diminuiscono e i nuovi supremi non aumentano. La seconda disuguaglianza segue usando il raffinamento comune $P \cup Q$.

Definizione e criteri di integrabilita'

Definizione – Integrale di Riemann (Def. 29.4)

Una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e' integrabile secondo Riemann se

$$\sup_P s(f, P) = \inf_P S(f, P).$$

Il valore comune si denota con

$$\int_a^b f(x) dx.$$

L'insieme delle funzioni Riemann-integrabili su $[a, b]$ si indica con $\mathcal{R}([a, b])$.

Teorema – Criteri di integrabilita' (Teo. 29.5)

Per una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono equivalenti:

- i. f e' integrabile secondo Riemann;
- ii. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione P tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$;
- iii. esiste una successione (P_n) di suddivisioni tale che $S(f, P_n) - s(f, P_n) \rightarrow 0$.

Se queste condizioni valgono, allora

$$s(f, P_n) \longrightarrow \int_a^b f, \quad S(f, P_n) \longrightarrow \int_a^b f.$$

Dimostrazione

Indichiamo con $I_* = \sup_P s(f, P)$ e $I^* = \inf_P S(f, P)$. Se $I_* = I^*$, scegliamo P_1, P_2 con

$$s(f, P_1) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(f, P_2) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per $P = P_1 \cup P_2$, la monotonia rispetto alla finezza da' $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. La seconda condizione produce la terza scegliendo l'errore minore di $1/(n+1)$. Infine, se la terza vale,

$$0 \leq I^* - I_* \leq S(f, P_n) - s(f, P_n) \rightarrow 0,$$

quindi $I_* = I^*$. Le convergenze finali seguono dai carabinieri, poiche' $s(f, P_n) \leq \int_a^b f \leq S(f, P_n)$. $\square$

Interpretazione geometrica ed esempi fondamentali

Teorema – Area del rettangoloide (Teo. 29.6)

Se $f \geq 0$ e' Riemann-integrabile su $[a, b]$, il sottografico

$$X_f = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

e' misurabile secondo Peano-Jordan e

$$m(X_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Le somme inferiori e superiori sono infatti le aree di due polirettangoli che racchiudono X_f ; il criterio di integrabilita' rende arbitrariamente piccola la differenza tra le loro aree.

Esercizio Svolto

Se $f(x) = \alpha$ su $[a, b]$, per ogni suddivisione

$$s(f, P) = S(f, P) = \alpha(b - a),$$

quindi $\int_a^b \alpha dx = \alpha(b - a)$.

Per $f(x) = x^2$ su $[0, b]$, consideriamo la suddivisione uniforme $x_k = kb/n$. Essendo f crescente,

$$s(f, P_n) = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2, \quad S(f, P_n) = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Entrambe tendono a $b^3/3$, dunque

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

Proposizione – Funzione di Dirichlet (Prop. 29.7)

La funzione $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $D = 1$ sui razionali e $D = 0$ sugli irrazionali non e' Riemann-integrabile.

Ogni intervallo non degenerare contiene razionali e irrazionali, quindi per ogni P si ha $s(D, P) = 0$ e $S(D, P) = 1$: lo scarto non puo' tendere a zero.

Additivita' e funzioni monotone

Teorema – Additivita' sugli intervalli (Teo. 29.8)

Sia $a < c < b$. Una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e' integrabile su $[a, b]$ se e solo se lo e' su $[a, c]$ e $[c, b]$. In tal caso

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Il criterio di integrabilita' si applica unendo suddivisioni dei due sottointervalli; nell'altra direzione si aggiunge c a una suddivisione di $[a, b]$ e si separano i due contributi.

Teorema – Integrabilità delle monotone (Teo. 29.9)

Ogni funzione monotona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e' Riemann-integrabile.

Dimostrazione

Supponiamo f crescente e usiamo la suddivisione uniforme $x_k = a + k(b-a)/n$. Su $[x_{k-1}, x_k]$ l'infimo e' $f(x_{k-1})$ e il supremo e' $f(x_k)$, quindi

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \rightarrow 0.$$

Il criterio conclude. Il caso decrescente e' analogo. $\square$

Continuita' uniforme e oscillazione

Definizione – Continuita' uniforme (Def. 29.10)

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e' uniformemente continua su A se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

La scelta di δ dipende da ε , non dal punto del dominio.

Ogni funzione Lipschitziana e' uniformemente continua. La funzione x^2 non lo e' su $\mathbb{R}$, ma lo e' su ogni intervallo limitato.

Teorema – Teorema di Heine-Cantor (Teo. 29.11)

Ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e' uniformemente continua.

Dimostrazione

Se non lo fosse, esisterebbero $\varepsilon_0 > 0$ e successioni $x_n, y_n \in [a, b]$ con $|x_n - y_n| < 1/n$ ma $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Per Bolzano-Weierstrass una sottosuccessione x_{n_k} converge a $c \in [a, b]$; allora anche $y_{n_k} \rightarrow c$. La continuita' implica che entrambe le immagini tendono a $f(c)$, contro la distanza almeno ε_0 . $\square$

Definizione – Oscillazione (Def. 29.12)

Se f e' limitata su A e $B \subseteq A$ e' non vuoto, l'oscillazione di f su B e'

$$\omega_f(B) = \sup_B f - \inf_B f.$$

Per $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ si ha

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n \omega_f([x_{i-1}, x_i]) (x_i - x_{i-1}).$$

Teorema – Integrabilit  delle continue (Teo. 29.13)

Ogni funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   Riemann-integrabile.

Dimostrazione

Per Heine-Cantor, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che punti a distanza minore di δ hanno valori a distanza minore di $\varepsilon/(b - a)$. Scegliamo P con $\|P\| < \delta$. Su ogni sottointervallo $\omega_f(I_i) \leq \varepsilon/(b - a)$ e dunque

$$S(f, P) - s(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_i (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

□

Teorema – Discontinuit  finite (Teo. 29.14)

Una funzione limitata su $[a, b]$ con un numero finito di punti di discontinuit    Riemann-integrabile.

Si isolano i punti di discontinuit  in intervalli di lunghezza totale tanto piccola da controllare il loro contributo; sul compatto restante la funzione   uniformemente continua.

Operazioni e area con segno

Teorema – Operazioni sulle integrabili (Teo. 29.15)

Se $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f + \mu g$, fg e $|f|$ sono integrabili e

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Se $f \leq g$, allora $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Scrivendo $f = f^+ - f^-$, con $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$, l'integrale   l'area sopra l'asse meno l'area sotto l'asse. Non rappresenta quindi l'area geometrica totale, che   invece $\int_a^b |f|$.