

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 3: Relazioni d'ordine

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Ordini · Maggioranti · Estremi · Completezza · Tagli

Indice

1	Relazioni d'ordine	1
2	Maggioranti, minoranti, massimo e minimo	2
3	Estremo superiore e inferiore	2
4	Insiemi ordinati completi	3
5	Insiemi contigui	4
6	Tagli di Dedekind	5

Relazioni d'ordine

Definizione Relazione d'ordine

Sia X un insieme. Una relazione $\leq$ su X e' una relazione d'ordine se verifica:

- riflessivita': $x \leq x$ per ogni $x \in X$;
- antisimmetria: $x \leq y$ e $y \leq x$ implicano $x = y$;
- transitivita': $x \leq y$ e $y \leq z$ implicano $x \leq z$.

La coppia $(X, \leq)$ si chiama insieme ordinato.

Si usano le notazioni derivate:

$$x \geq y \iff y \leq x, \quad x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y.$$

Definizione Ordine totale

Un ordine $\leq$ su X e' totale se due elementi qualunque sono confrontabili:

$$\forall x, y \in X \quad x \leq y \vee y \leq x.$$

Un insieme con ordine totale si dice totalmente ordinato o linearmente ordinato.

Nota Ordine parziale e totale

L'inclusione $\subset$ su $\mathcal{P}(S)$ e' un ordine, ma non e' totale se S ha almeno due elementi: per esempio $\{a\}$ e $\{b\}$ non sono confrontabili quando $a \neq b$.

Esercizio Svolto

Su $\mathbb{N}$ si puo' definire

$$n \leq m \iff \exists k \in \mathbb{N} : m = n + k.$$

Questo e' un ordine totale.

Definizione Ordine lessicografico

Se $(X_1, \leq_1)$ e $(X_2, \leq_2)$ sono ordinati, su $X_1 \times X_2$ si definisce l'ordine lessicografico ponendo

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \iff x_1 <_1 y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq_2 y_2).$$

Se gli ordini di partenza sono totali, anche l'ordine lessicografico e' totale.

Maggioranti, minoranti, massimo e minimo

Definizione Maggioranti e minoranti

Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato e sia $A \subset X$, $A \neq \emptyset$.

- $M \in X$ e' un maggiorante di A se $a \leq M$ per ogni $a \in A$.
- $m \in X$ e' un minorante di A se $m \leq a$ per ogni $a \in A$.

A e' limitato superiormente se ammette maggiorante, limitato inferiormente se ammette minorante, limitato se valgono entrambe.

Definizione Massimo e minimo

Un elemento $a \in A$ e' massimo di A se

$$x \leq a \quad \forall x \in A.$$

In tal caso si scrive $a = \max A$.

Un elemento $a \in A$ e' minimo di A se

$$a \leq x \quad \forall x \in A.$$

In tal caso si scrive $a = \min A$.

Nota Esistenza

Massimo e minimo, quando esistono, sono unici per antisimmetria. Non sempre esistono: nell'intervallo aperto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ non ci sono ne' massimo ne' minimo, pur essendo l'insieme limitato.

Estremo superiore e inferiore

Definizione Estremo superiore

Se $A \subset X$ e' non vuoto e limitato superiormente, l'estremo superiore di A e' il minimo dell'insieme dei maggioranti:

$$\sup A = \min\{M \in X : \forall a \in A, a \leq M\},$$

quando tale minimo esiste.

Definizione Estremo inferiore

Se $A \subset X$ e' non vuoto e limitato inferiormente, l'estremo inferiore di A e' il massimo dell'insieme dei minoranti:

$$\inf A = \max\{m \in X : \forall a \in A, m \leq a\},$$

quando tale massimo esiste.

Teorema Caratterizzazione del sup

Sia $(X, \leq)$ totalmente ordinato, $A \subset X$ non vuoto e limitato superiormente. Allora $s = \sup A$ se e solo se:

$$\forall a \in A : a \leq s,$$

e

$$\forall b \in X, b < s \Rightarrow \exists a \in A : a > b.$$

Teorema Caratterizzazione dell'inf

Sia $(X, \leq)$ totalmente ordinato, $A \subset X$ non vuoto e limitato inferiormente. Allora $i = \inf A$ se e solo se:

$$\forall a \in A : i \leq a,$$

e

$$\forall b \in X, b > i \Rightarrow \exists a \in A : a < b.$$

Nota Nel caso reale

Per $A \subset \mathbb{R}$, la caratterizzazione del sup si scrive spesso:

$$s = \sup A \iff \begin{cases} a \leq s \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > s - \varepsilon. \end{cases} \quad \forall a \in A,$$

La seconda condizione dice che gli elementi di A arrivano arbitrariamente vicino a s da sinistra.

Esercizio Svolto

Per $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$:

$$\inf A = 0, \quad \sup A = 1,$$

ma A non ha minimo e non ha massimo, perché $0, 1 \notin A$.

Insiemi ordinati completi

Definizione Insiemi separati e separatore

Siano $A, B \subset X$ non vuoti. Si scrive $A \leq B$ se

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

In tal caso A e B si dicono separati.

Un elemento $\lambda \in X$ è un separatore tra A e B se

$$A \leq \lambda \leq B,$$

cioè $a \leq \lambda \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$.

Teorema Forme equivalenti della completezza

Per un insieme ordinato $(X, \leq)$ sono equivalenti:

- i. ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente ammette sup;
- ii. ogni sottoinsieme non vuoto e limitato inferiormente ammette inf;
- iii. ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti e separati ammette un separatore.

Un insieme ordinato che verifica queste proprietà si dice completo.

Dimostrazione

Mostriamo le idee principali.

Se ogni insieme limitato superiormente ha sup e $A \leq B$, allora ogni elemento di B è maggiorante di A . Quindi A ha $\lambda = \sup A$. Per definizione $A \leq \lambda$; inoltre λ è minore o uguale a ogni maggiorante, dunque $\lambda \leq B$. Quindi λ è separatore.

Viceversa, sia A non vuoto e limitato superiormente e sia B l'insieme dei maggioranti di A . Allora $A \leq B$. Se esiste λ con $A \leq \lambda \leq B$, allora λ è maggiorante di A ed è minore o uguale di ogni maggiorante: quindi $\lambda = \sup A$.

Le affermazioni con l'inf si provano in modo analogo, scambiando maggioranti e minoranti. $\square$

Esercizio Svolto

Se S è un insieme, $(\mathcal{P}(S), \subset)$ è completo. Infatti, per ogni famiglia non vuota $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(S)$:

$$\sup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A, \quad \inf \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A.$$

Insiemi contigui

Teorema Separatori tra due insiemi

Sia $(X, \leq)$ completo. Se $A, B \subset X$ sono non vuoti e separati, allora esistono $\sup A$ e $\inf B$ e

$$\sup A \leq \inf B.$$

Inoltre

$$A \leq \lambda \leq B \iff \sup A \leq \lambda \leq \inf B.$$

Definizione Insiemi contigui

In un insieme ordinato completo, due insiemi non vuoti e separati A, B sono contigui se

$$\sup A = \inf B.$$

Equivalentemente, hanno un unico separatore.

Nota Interpretazione

La contiguità formalizza l'idea di due insiemi che si avvicinano allo stesso punto senza lasciare spazio tra loro. Nel caso reale, due insiemi separati sono contigui quando il “bordo destro” del primo coincide con il “bordo sinistro” del secondo.

Tagli di Dedekind

Definizione Taglio di Dedekind

Sia $(X, \leq)$ totalmente ordinato. Un taglio di Dedekind è una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti, separati, disgiunti e tali che

$$A \cup B = X, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Definizione Ordine denso

Un ordine totale su X è denso se, per ogni $x < y$, esiste $z \in X$ tale che

$$x < z < y.$$

Teorema Completezza e continuità dell'ordine

Se $(X, \leq)$ è totalmente ordinato e denso, allora sono equivalenti:

- i. $(X, \leq)$ è completo;
- ii. ogni taglio di Dedekind di X ammette un unico separatore.

Nota Buchi nell'ordinamento

La completezza impedisce la presenza di “buchi” nell'ordine. Nei razionali, per esempio, il taglio determinato da $x^2 < 2$ non ha separatore razionale: questo esprime il fatto che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.