

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 31: Metodi di integrazione

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Linearità · Parti · Sostituzione · Funzioni razionali · Razionalizzazioni

Indice

1	Decomposizione in somma	1
2	Integrazione per parti	1
3	Integrazione per sostituzione	2
4	Simmetrie	2
5	Funzioni razionali e fratti semplici	3
6	Sostituzioni che razionalizzano	3

Decomposizione in somma

Proposizione – Linearita' dell'integrale indefinito (Prop. 31.1)

Se $F' = f$, $G' = g$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha F + \beta G + C.$$

La formula permette di scomporre una somma, ma non esistono analoghe regole generali per integrare prodotti o quozienti.

Per esempio,

$$\int \left(3x^2 - \frac{2}{x} + \cos x \right) dx = x^3 - 2 \ln |x| + \sin x + C$$

su ciascun intervallo che non contiene zero.

Integrazione per parti

Teorema – Formula di integrazione per parti (Teo. 31.2)

Se u e v sono di classe C^1 su un intervallo, allora

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Su $[a, b]$,

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

La formula e' la regola del prodotto riscritta e integrata. Conviene derivare il fattore che si semplifica e integrare quello di cui si conosce una primitiva.

Esercizio Svolto

Per calcolare $\int xe^x dx$, poniamo $u = x$ e $v' = e^x$. Allora

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x + C.$$

Per $\int \ln x dx$ si scrive $\ln x \cdot 1$:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad (x > 0).$$

Integrazione per sostituzione

Teorema – Sostituzione negli integrali (Teo. 31.3)

Sia f continua su un intervallo J e sia $\varphi : I \rightarrow J$ di classe C^1 . Allora

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C,$$

dove $F' = f$. Per $\alpha, \beta \in I$ vale inoltre

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Non e' necessario che φ sia monotona per la formula definita; occorre pero' che immagine e domini siano corretti.

Esercizio Svolto

Con $t = x^2 + 1$,

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln(x^2 + 1) + C.$$

Nel definito,

$$\int_0^1 2xe^{x^2} dx = \int_0^1 e^u du = e - 1,$$

dove $u = x^2$ e gli estremi sono stati trasformati.

Simmetrie

Proposizione – Integrali di funzioni pari e dispari (Prop. 31.4)

Se $f \in \mathcal{R}([-a, a])$, allora

$$f \text{ pari} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

$$f \text{ dispari} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Si spezza l'integrale in zero e nella parte sinistra si pone $x = -t$.

Funzioni razionali e fratti semplici

Proposizione – Riduzione delle funzioni razionali (Prop. 31.5)

Siano P, Q polinomi reali, $Q \neq 0$. Se $\deg P \geq \deg Q$, la divisione euclidea scrive $P = DQ + R$ con $\deg R < \deg Q$. Dopo aver fattorizzato Q su $\mathbb{R}$, R/Q si decompone in termini del tipo

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}, \quad \frac{B_k x + C_k}{(x^2 + px + q)^k},$$

dove $x^2 + px + q$ è irriducibile, cioè $p^2 - 4q < 0$.

I fattori lineari producono logaritmi e potenze:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{1-k} (x-a)^{1-k} + C \quad (k > 1).$$

Per un quadratico, si separa dal numeratore una parte proporzionale alla derivata del denominatore e si completa il quadrato; compaiono logaritmi e arcotangenti.

Esercizio Svolto

Scomponiamo

$$\frac{x+1}{x^2-10x+21} = \frac{x+1}{(x-3)(x-7)} = -\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-7}.$$

Quindi, su ogni intervallo che non attraversa 3 o 7,

$$\int \frac{x+1}{x^2-10x+21} dx = -\ln |x-3| + 2 \ln |x-7| + C.$$

Invece

$$\int \frac{1}{x^2+x+2} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}} \right) + C.$$

Sostituzioni che razionalizzano

Proposizione – Sostituzioni razionalizzanti (Prop. 31.6)

I seguenti cambi di variabile trasformano le classi indicate in funzioni razionali della nuova variabile:

- per $R(e^{\lambda x})$, con $\lambda \neq 0$, porre $t = e^{\lambda x}$ e $dx = dt/(\lambda t)$;
- per espressioni razionali in $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ e $\sin x \cos x$, porre $t = \tan x$;
- per ogni $R(\sin x, \cos x)$, porre $t = \tan(x/2)$, cosicché

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2};$$

- per radicali del tipo $\sqrt[m]{ax+b}$, porre $t = \sqrt[m]{ax+b}$; per piu' radici si sceglie una potenza comune.

Ogni formula vale su intervalli in cui il cambio di variabile e' ben definito e non attraversa le sue singularita'.

Esercizio Svolto

Con $t = \tan(x/2)$,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln |\tan(x/2)| + C.$$

La formula e' valida su ciascun intervallo che non contiene uno zero del seno.

Nota Controllo finale

Dopo una sostituzione si torna sempre alla variabile originaria e si deriva il risultato. Negli integrali definiti, invece, e' spesso piu' sicuro cambiare subito gli estremi e non effettuare la sostituzione inversa.