

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 32: Integrali impropri

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Intervalli aperti · Confronto · Convergenza assoluta · Criterio integrale

Indice

1	Definizioni sui diversi tipi di intervallo	1
2	Integrali modello	1
3	Linearita' e monotonia	2
4	Convergenza assoluta	3
5	Criterio integrale per le serie	4

Definizioni sui diversi tipi di intervallo

Definizione – Integrale improprio a un estremo (Def. 32.1)

Sia f localmente Riemann-integrabile. Su un intervallo semiaperto si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx \quad \text{su } [a, b),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x) dx \quad \text{su } (a, b].$$

Gli estremi a, b possono essere infiniti. L'integrale converge se il limite esiste finito; diverge positivamente o negativamente se vale $+\infty$ o $-\infty$.

Definizione – Intervallo aperto a entrambi gli estremi (Def. 32.2)

Se $I = (a, b)$ e $c \in (a, b)$, si definisce

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

purché i due integrali impropri esistano e la somma non sia una forma $+\infty - \infty$. La convergenza richiede che entrambi siano finiti e non dipende dal punto c scelto.

Ogni singolarità interna deve essere trattata come un nuovo estremo: si spezza l'integrale e si studia separatamente ciascun pezzo.

Proposizione – Carattere locale (Prop. 32.3)

Su $[a, b)$, l'esistenza dell'integrale improprio dipende solo dal comportamento in un intorno di b . Più precisamente, per ogni $c \in (a, b)$,

$$\int_a^b f \text{ converge} \iff \int_c^b f \text{ converge}.$$

La parte $\int_a^c f$ è infatti un integrale proprio finito.

Integrali modello

Teorema – Integrali di potenze (Teo. 32.4)

Per $p > 0$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{converge e vale } 1/(p-1), & p > 1, \\ \text{diverge a } +\infty, & 0 < p \leq 1, \end{cases}$$

mentre

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{converge e vale } 1/(1-p), & 0 < p < 1, \\ \text{diverge a } +\infty, & p \geq 1. \end{cases}$$

Le soglie si ottengono valutando la primitiva $x^{1-p}/(1-p)$ per $p \neq 1$ e $\ln x$ per $p = 1$.

Esercizio Svolto

Per $q > 0$,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^q}$$

si riduce, con $t = \ln x$, a $\int_{\ln 2}^{+\infty} t^{-q} dt$. Quindi converge se e solo se $q > 1$.

Linearita' e monotonia

Teorema – Linearita' (Teo. 32.5)

Se f e g sono integrabili in senso improprio su I e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f + \mu g$ e' integrabile e

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

L'enunciato riguarda integrali convergenti: non si possono combinare formalmente infiniti di segno opposto.

Proposizione – Integrali di funzioni positive (Prop. 32.6)

Se $f \geq 0$ e' localmente integrabile su I , il suo integrale improprio esiste sempre come elemento di $[0, +\infty]$. Infatti le funzioni integrali parziali sono monotone; f e' impropriamente integrabile se e solo se esse sono limitate superiormente.

Teorema – Monotonia e confronto (Teo. 32.7)

Siano f, g localmente integrabili e $0 \leq f \leq g$ definitivamente presso ogni estremo improprio. Allora:

- se $\int_I g$ converge, anche $\int_I f$ converge;
- se $\int_I f$ diverge a $+\infty$, anche $\int_I g$ diverge.

Piu' in generale, quando entrambi gli integrali esistono, $f \leq g$ implica $\int_I f \leq \int_I g$.

Teorema – Confronto asintotico (Teo. 32.8)

Siano $f, g \geq 0$ definitivamente presso un estremo improprio. Se $f = o(g)$, la convergenza di $\int g$ implica quella di $\int f$. Se $f \sim Lg$ con $0 < L < +\infty$, i due integrali hanno lo stesso carattere.

La prova riduce le equivalenze a disuguaglianze: definitivamente $f \leq g$ nel primo caso, mentre nel secondo $(L/2)g \leq f \leq (3L/2)g$.

Esercizio Svolto

Poiche' $\ln(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{1}{\sqrt{\ln(1+x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Pertanto $\int_0^1 [\ln(1+x)]^{-1/2} dx$ converge per confronto asintotico con l'integrale modello di esponente $p = 1/2$.

Convergenza assoluta

Definizione – Integrabilita' assoluta (Def. 32.9)

Una funzione localmente integrabile f e' assolutamente integrabile in senso improprio, o sommabile, su I se

$$\int_I |f(x)| dx < +\infty.$$

Teorema – Assoluta convergenza (Teo. 32.10)

Se f e' assolutamente integrabile in senso improprio, allora f e' integrabile in senso improprio e

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Dimostrazione

Poniamo $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$. Poiche' $0 \leq f^\pm \leq |f|$, il confronto rende finiti gli integrali di f^+ e f^- . Dalle identita' $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$, la linearita' fornisce convergenza e disuguaglianza triangolare. $\square$

Criterio integrale per le serie

Teorema – Criterio integrale (Teo. 32.11)

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia $f : [n_0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ decrescente. Allora

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \quad \text{e} \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(x) \, dx$$

hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione

Per $n > n_0$, la monotonia dà, su ogni $[k, k+1]$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq f(k).$$

Sommando per $k = n_0, \dots, n-1$,

$$\sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k).$$

Le somme ai lati differiscono solo per un numero finito di termini. Quindi sono limitate simultaneamente se e solo se lo sono gli integrali parziali. $\square$

Il criterio applicato a $f(x) = x^{-p}$ ritrova il carattere della serie armonica generalizzata.