

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 4: I numeri reali

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Campo ordinato · Valore assoluto · Intervalli

Indice

1	Gli assiomi di campo	1
2	Gli assiomi di ordinamento	1
3	Struttura reticolare di $\mathbb{R}$	2
4	Intervalli di $\mathbb{R}$	3

Gli assiomi di campo

Sull'insieme $\mathbb{R}$ sono definite l'addizione e la moltiplicazione. Per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ valgono gli assiomi

$$\begin{array}{ll} \text{A1} & x + (y + z) = (x + y) + z, & \text{M1} & x(yz) = (xy)z, \\ \text{A2} & x + 0 = 0 + x = x, & \text{M2} & x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \quad 1 \neq 0, \\ \text{A3} & x + (-x) = 0, & \text{M3} & x \neq 0 \Rightarrow xx^{-1} = 1, \\ \text{A4} & x + y = y + x, & \text{M4} & xy = yx, \end{array}$$

e la proprieta' distributiva

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Questi assiomi dicono che $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e' un campo commutativo.

Proposizione – Conseguenze degli assiomi (Prop. 4.1)

Per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ valgono:

- i. $-(-x) = x$ e, se $x \neq 0$, $(x^{-1})^{-1} = x$;
- ii. $x + z = y + z \Rightarrow x = y$;
- iii. se $z \neq 0$, $xz = yz \Rightarrow x = y$;
- iv. $xy = 0 \iff x = 0$ oppure $y = 0$;
- v. $(-x)y = -(xy)$ e $(-x)(-y) = xy$;
- vi. se $x, y \neq 0$, $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

Dimostrazione

Per la cancellazione additiva si somma $-z$ ai due membri. Per quella moltiplicativa si moltiplica per z^{-1} . Se $xy = 0$ e $x \neq 0$, allora $y = x^{-1}(xy) = 0$; il viceversa segue da $x0 = 0$. Le regole dei segni si ottengono osservando che $(-x)y$ e' l'opposto di xy . Infine $(xy)(x^{-1}y^{-1}) = 1$, dunque l'unicita' dell'inverso conclude. $\square$

Definizione – Differenza e divisione (Def. 4.2)

Per $x, y \in \mathbb{R}$ si pone

$$x - y = x + (-y), \quad \frac{x}{y} = xy^{-1} \quad \text{se } y \neq 0.$$

La divisione per zero non e' definita.

Gli assiomi di ordinamento

La relazione $\leq$ su $\mathbb{R}$ e' riflessiva, antisimmetrica, transitiva e totale. Inoltre, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

$$x \leq y \text{ e } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz.$$

Pertanto $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ e' un campo totalmente ordinato.

Definizione – Segno (Def. 4.3)

Si definiscono

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Un numero e' non positivo se $x \leq 0$ e negativo se $x < 0$.

Proposizione – Regole d'ordine (Prop. 4.4)

Per $x, y, z \in \mathbb{R}$ valgono:

- i. $x \geq 0 \iff -x \leq 0$;
- ii. $x^2 \geq 0$ e $1 > 0$;
- iii. se $z > 0$ e $x < y$, allora $xz < yz$;
- iv. se $z < 0$ e $x < y$, allora $xz > yz$;
- v. se $x > 0$, allora $x^{-1} > 0$;
- vi. se $x < y$, allora $x < (x + y)/2 < y$.

In particolare l'ordine di $\mathbb{R}$ e' denso.

Esercizio Svolto

Risolvere $-2 < 3 - 2x \leq 7$. Sottraendo 3 si ottiene $-5 < -2x \leq 4$. Dividendo per -2 si invertono i versi:

$$\frac{5}{2} > x \geq -2.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni e' $[-2, 5/2)$.

Struttura reticolare di $\mathbb{R}$

Definizione – Valore assoluto e parti positiva e negativa (Def. 4.5)

Per $x \in \mathbb{R}$ si pone

$$|x| = \max\{x, -x\}, \quad x^+ = \max\{x, 0\}, \quad x^- = \max\{-x, 0\}.$$

Ne segue

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-.$$

Proposizione – Proprieta' del valore assoluto (Prop. 4.6)

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |x| = 0 &\iff x = 0, & |-x| &= |x|, \\ -|x| &\leq x \leq |x|, & |xy| &= |x| |y|, \\ |x + y| &\leq |x| + |y|, & ||x| - |y|| &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

Se $a > 0$, inoltre,

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a, \quad |x| < a \iff -a < x < a.$$

Dimostrazione

Poiche' $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, sommando le analoghe disuguaglianze per y si ottiene $\pm(x + y) \leq |x| + |y|$, quindi la disuguaglianza triangolare. Applicandola a $x = (x - y) + y$ e poi scambiando x, y si ricava la forma inversa. Le altre proprieta' seguono distinguendo i segni dei fattori. $\square$

Intervalli di $\mathbb{R}$

Definizione – Intervalli limitati (Def. 4.7)

Se $a \leq b$, si definiscono

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, & [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, & (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}. \end{aligned}$$

La loro ampiezza e' $b - a$. Per x, y appartenenti allo stesso intervallo limitato di estremi a, b vale $|x - y| \leq b - a$.

Definizione – Intervalli illimitati (Def. 4.8)

Per $a \in \mathbb{R}$ si pongono

$$[a, +\infty), \quad (a, +\infty), \quad (-\infty, a], \quad (-\infty, a),$$

con il consueto significato dato dalle disuguaglianze. I simboli $\pm\infty$ non sono numeri reali e non sono mai inclusi nell'intervallo.