

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 5: I numeri naturali

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Induzione · Ricorrenza · Buon ordinamento · Numeri primi

Indice

1	I numeri naturali e il principio di induzione	1
2	Verifica degli assiomi di Peano	2
3	Proprieta' dei numeri naturali	2
4	Complementi: il teorema fondamentale dell'aritmetica	3

I numeri naturali e il principio di induzione

Definizione – Insieme induttivo (Def. 5.1)

Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice induttivo se

$$0 \in A, \quad x \in A \Rightarrow x + 1 \in A.$$

Teorema – Esistenza del minimo insieme induttivo (Teo. 5.2)

Esiste un unico insieme induttivo contenuto in ogni altro sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$.

Dimostrazione

La famiglia $\mathcal{F}$ dei sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$ non è vuota, perché contiene $\mathbb{R}$. L'intersezione

$$W = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$$

contiene 0 ed è chiusa rispetto a $x \mapsto x + 1$; quindi è induttiva. Per costruzione $W \subset A$ per ogni $A \in \mathcal{F}$. $\square$

Definizione – Numeri naturali (Def. 5.3)

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è il minimo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$. Si pone $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e si chiama $n + 1$ il successore di n .

Teorema – Principio di induzione (Teo. 5.4)

Sia $A \subset \mathbb{N}$. Se $0 \in A$ e

$$n \in A \Rightarrow n + 1 \in A \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora $A = \mathbb{N}$. Equivalentemente, se una proprietà $P(n)$ è vera per $n = 0$ e $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora è vera per ogni naturale.

Esercizio Svolto

Dimostriamo per induzione che $2^n \geq n + 1$. Per $n = 0$ vale $1 \geq 1$. Se $2^n \geq n + 1$, allora

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n + 2 \geq n + 2.$$

La tesi vale dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Verifica degli assiomi di Peano

Teorema – Proprieta' del successore (Teo. 5.5)

La funzione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $s(n) = n + 1$, verifica:

- i. s e' iniettiva;
- ii. $0 \notin s(\mathbb{N})$;
- iii. ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che contiene 0 ed e' stabile per s coincide con $\mathbb{N}$.

Queste proprieta', insieme all'esistenza di $\mathbb{N}$, sono gli assiomi di Peano nella presente costruzione.

Proprieta' dei numeri naturali

Proposizione – Aritmetica e ordine in $\mathbb{N}$ (Prop. 5.6)

Per $n, m \in \mathbb{N}$:

- i. $n + m, nm \in \mathbb{N}$;
- ii. $n \leq m$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $m = n + k$;
- iii. $n < m$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{N}^*$ tale che $m = n + k$;
- iv. $n < m \Rightarrow n + 1 \leq m$;
- v. se $n \neq 0$, allora $n \geq 1$.

Teorema – Definizione per ricorrenza (Teo. 5.7)

Siano X un insieme, $x_0 \in X$ e $f : X \rightarrow X$. Esiste un'unica successione $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ tale che

$$u(0) = x_0, \quad u(n+1) = f(u(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definizione – Potenze naturali (Def. 5.8)

Per $a \in \mathbb{R}$ si definisce ricorsivamente

$$a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a^n a.$$

Per $a, b \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{N}$ valgono

$$a^{n+m} = a^n a^m, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Proposizione – Disuguaglianza di Bernoulli (Prop. 5.9)

Se $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$, allora

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Se $x > -1$, $x \neq 0$ e $n \geq 2$, la disuguaglianza e' stretta.

Dimostrazione

Per $n = 0$ c'e' uguaglianza. Supposta vera per n , poiche' $1+x \geq 0$,

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

La forma stretta segue da $nx^2 > 0$ quando indicato. $\square$

Teorema – Principio del buon ordinamento (Teo. 5.10)

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ possiede un minimo.

Proposizione – Massimo di un insieme limitato superiormente (Prop. 5.11)

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ limitato superiormente in $\mathbb{N}$ possiede un massimo.

Teorema – Divisione euclidea (Teo. 5.12)

Siano $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \neq 0$. Esiste un'unica coppia $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tale che

$$n = qm + r, \quad 0 \leq r < m.$$

Esercizio Svolto

Dividendo 37 per 5 si trova

$$37 = 7 \cdot 5 + 2.$$

Quindi quoziente e resto sono rispettivamente $q = 7$ e $r = 2$; l'unicita' segue dal teorema.

Complementi: il teorema fondamentale dell'aritmetica

Definizione – Divisibilita' e numeri primi (Def. 5.13)

Per $m, n \in \mathbb{N}^*$ si dice che m divide n , e si scrive $m \mid n$, se $n = mq$ per qualche $q \in \mathbb{N}$. Un numero $p \geq 2$ e' primo se i suoi soli divisori positivi sono 1 e p .

Teorema – Teorema fondamentale dell'aritmetica (Teo. 5.14)

Ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, si scrive come prodotto di numeri primi. Tale fattorizzazione e'

unica a meno dell'ordine dei fattori; equivalentemente,

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

dove i p_i sono primi distinti e gli $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Teorema – Infinitudine dei numeri primi (Teo. 5.15)

Esistono infiniti numeri primi.

Dimostrazione

Se $p_1, \dots, p_k$ fossero tutti i primi, il numero $N = p_1 \cdots p_k + 1$ non sarebbe divisibile da nessuno di essi. Tuttavia $N \geq 2$ deve essere primo o possedere un divisore primo, in entrambi i casi esterno alla lista: assurdo. $\square$