

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 6: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e conseguenze della completezza

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Interi · Razionali · Completezza · Archimede · Densita'

Indice

1	I numeri interi relativi e razionali	1
2	Estremo superiore, inferiore, minimo e massimo in $\mathbb{R}$	2
3	Conseguenze dell'assioma di completezza	3
4	Complementi	4
4.1	Il principio degli intervalli incapsulati	4
4.2	Il metodo di bisezione	5

I numeri interi relativi e razionali

Definizione – Numeri interi (Def. 6.1)

Si definisce

$$\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}, \quad -\mathbb{N} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposizione – Proprieta' di $\mathbb{Z}$ (Prop. 6.2)

Per $m, n \in \mathbb{Z}$ si ha $m + n, mn \in \mathbb{Z}$. Inoltre

$$n \geq 0 \iff n \in \mathbb{N}.$$

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Z}$ limitato inferiormente in $\mathbb{Z}$ possiede un minimo; se e' limitato superiormente, possiede un massimo.

Definizione – Potenze con esponente intero (Def. 6.3)

Se $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{Z}$, per $n < 0$ si pone

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Per $m, n \in \mathbb{Z}$ restano valide

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

quando le espressioni sono definite. In particolare 0^n non e' definito per $n \leq 0$.

Definizione – Numeri razionali (Def. 6.4)

L'insieme dei numeri razionali e'

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Proposizione – Il campo dei razionali (Prop. 6.5)

Con le operazioni e l'ordine ereditati da $\mathbb{R}$, la struttura $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ e' un campo totalmente ordinato.

Teorema – Irrazionalita' di $\sqrt{2}$ (Teo. 6.6)

Non esiste $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.

Dimostrazione

Se $x = m/n > 0$ fosse una soluzione, si potrebbe scegliere la frazione con $m, n \in \mathbb{N}^*$ non entrambi pari. Da $m^2 = 2n^2$ segue che m^2 , e dunque m , e' pari: $m = 2k$. Allora $n^2 = 2k^2$, quindi anche n e' pari, contraddicendo la scelta della rappresentazione. $\square$

Teorema – Incompletezza di $\mathbb{Q}$ (Teo. 6.7)

Il campo ordinato $\mathbb{Q}$ non e' completo. Per esempio

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0, q^2 < 2\}$$

e' non vuoto e limitato superiormente in $\mathbb{Q}$, ma non possiede estremo superiore razionale.

Estremo superiore, inferiore, minimo e massimo in $\mathbb{R}$

Definizione – Limitatezza (Def. 6.8)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto. Un numero M e' un maggiorante di A se $a \leq M$ per ogni $a \in A$; un numero m e' un minorante se $m \leq a$ per ogni $a \in A$. L'insieme e' limitato se e solo se esiste $C \geq 0$ tale che

$$|a| \leq C \quad \forall a \in A.$$

Un maggiorante appartenente ad A e' il massimo; un minorante appartenente ad A e' il minimo.

Proposizione – Caratterizzazione di sup e inf (Prop. 6.9)

Se $A \subset \mathbb{R}$ e' non vuoto e limitato superiormente, allora

$$s = \sup A \iff \begin{cases} a \leq s & \forall a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > s - \varepsilon. \end{cases}$$

Se A e' limitato inferiormente,

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a & \forall a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Teorema – Forme della completezza (Teo. 6.10)

Sono equivalenti:

- i. ogni insieme non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore;
- ii. ogni insieme non vuoto e limitato inferiormente ha estremo inferiore;
- iii. ogni coppia $A, B \subset \mathbb{R}$ non vuota e separata, cioe' $a \leq b$ per ogni $a \in A, b \in B$, ammette un separatore λ con $A \leq \lambda \leq B$.

Queste proprieta' costituiscono l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$.

Proposizione – Insiemi contigui (Prop. 6.11)

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ non vuoti e separati, con $A \leq B$. Sono equivalenti:

- i. A e B hanno un unico separatore;
- ii. $\sup A = \inf B$;
- iii. per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $0 \leq b - a < \varepsilon$.

In tal caso A e B si dicono contigui.

Dimostrazione

Poiché $A \leq B$, ogni elemento di B è maggiorante di A e ogni elemento di A è minorante di B ; quindi $\sup A \leq \inf B$. Se i due estremi coincidono in s , allora s è separatore e ogni altro separatore t verifica $\sup A \leq t \leq \inf B$, dunque $t = s$.

Supponiamo ora che $s = \sup A = \inf B$. Dato $\varepsilon > 0$, esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $a > s - \varepsilon/2$ e $b < s + \varepsilon/2$; pertanto $0 \leq b - a < \varepsilon$. Viceversa, se questa approssimazione vale per ogni $\varepsilon > 0$ ma fosse $\sup A < \inf B$, scegliendo $\varepsilon = (\inf B - \sup A)/2$ si avrebbe sempre $b - a \geq \inf B - \sup A > \varepsilon$, assurdo. $\square$

Esercizio Svolto

Per $A = (0, 1)$ si ha $\inf A = 0$ e $\sup A = 1$, ma non esistono minimo e massimo. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, scegliendo $a = \min\{1/2, \varepsilon/2\}$ si ottiene $a < 0 + \varepsilon$; analogamente esistono punti di A maggiori di $1 - \varepsilon$.

Conseguenze dell'assioma di completezza

Teorema – Proprietà di Archimede (Teo. 6.12)

L'insieme $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente in $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x.$$

Equivalentemente, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}^*$ tale che $1/n < \varepsilon$.

Dimostrazione

Se $\mathbb{N}$ fosse limitato superiormente, esisterebbe $s = \sup \mathbb{N}$. Per la caratterizzazione del sup, $s - 1$ non sarebbe maggiorante: esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ con $n > s - 1$. Ma allora $n + 1 \in \mathbb{N}$ e $n + 1 > s$, assurdo. $\square$

Proposizione – Illimitatezza di $\mathbb{Z}$ (Prop. 6.13)

L'insieme $\mathbb{Z}$ è illimitato sia superiormente sia inferiormente in $\mathbb{R}$.

Teorema – Densita' di $\mathbb{Q}$ (Teo. 6.14)

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$a < q < b.$$

Anche $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e' denso in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione

Per Archimede si scelga $n \in \mathbb{N}^*$ con $n(b-a) > 1$. Sia m il minimo intero strettamente maggiore di na . Allora $m - 1 \leq na < m$ e $m < na + 1 < nb$, percio' $a < m/n < b$. Per ottenere un irrazionale nell'intervallo si parte da tale razionale q e si sceglie k grande affinche' $q + \sqrt{2}/k < b$. $\square$

Complementi

Il principio degli intervalli incapsulati

Definizione – Intervalli incapsulati (Def. 6.15)

Una successione $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di intervalli e' incapsulata se

$$I_{n+1} \subseteq I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema – Principio degli intervalli incapsulati (Teo. 6.16)

Sia $I_n = [a_n, b_n]$ una successione di intervalli chiusi, limitati e incapsulati. Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Se inoltre $\inf_n (b_n - a_n) = 0$, l'intersezione contiene un solo punto.

Dimostrazione

Gli insiemi $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ sono separati. Per completezza esiste λ con $A \leq \lambda \leq B$, quindi $a_n \leq \lambda \leq b_n$ per ogni n . Inoltre

$$\bigcap_n I_n = [\sup A, \inf B].$$

Se le ampiezze hanno infimo zero, allora $0 \leq \inf B - \sup A \leq \inf_n (b_n - a_n) = 0$, dunque gli estremi coincidono. $\square$

Il metodo di bisezione

Procedura – Bisezione (Proc. 6.17)

Sia $P(I)$ una proprietà di intervalli chiusi e limitati che, se vera su $I = [a, b]$, rimane vera su almeno una delle due metà. Partendo da I_0 con $P(I_0)$ vera, si sceglie ricorsivamente una metà $I_{n+1} \subset I_n$ per cui $P(I_{n+1})$ è vera. Allora

$$|I_n| = \frac{|I_0|}{2^n}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}.$$

Il punto x_0 è quello individuato dal procedimento.