

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 7: Sommatorie e teorema del binomio

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Sommatorie · Coefficienti binomiali · Cardinalità · Numerabilità

Indice

1	Sommatorie	1
2	Fattoriale e teorema del binomio	2
3	Insiemi finiti e infiniti	3
4	Insiemi numerabili	3
5	Insiemi infiniti non numerabili	4
6	Complementi: dimostrazioni sulla cardinalita'	4

Sommatorie

Definizione – Somma finita (Def. 7.1)

Per una successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ si definisce ricorsivamente

$$\sum_{k=0}^0 a_k = a_0, \quad \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1}.$$

Quindi $\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \cdots + a_n$.

Proposizione – Regole delle sommatorie (Prop. 7.2)

Per somme finite valgono linearita', scomposizione e cambio d'indice:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (\alpha a_k + \beta b_k) &= \alpha \sum_{k=0}^n a_k + \beta \sum_{k=0}^n b_k, \\ \sum_{k=0}^n a_k &= \sum_{k=0}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \quad (0 \leq m < n), \\ \sum_{k=0}^n a_k &= \sum_{j=r}^{n+r} a_{j-r} = \sum_{k=0}^n a_{n-k}. \end{aligned}$$

Proposizione – Somma geometrica (Prop. 7.3)

Per $q \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1, & q = 1, \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

Dimostrazione

Il caso $q = 1$ e' immediato. Se $q \neq 1$, posto $S = 1 + q + \cdots + q^n$, sottraendo qS da S si ottiene $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$. $\square$

Proposizione – Somma dei primi naturali (Prop. 7.4)

Per $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dimostrazione

Scrivendo la somma una volta in ordine crescente e una in ordine decrescente, ogni coppia di termini corrispondenti vale $n + 1$. Pertanto $2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1)$. $\square$

Proposizione – Due somme notevoli (Prop. 7.5)

Per $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio Svolto

Calcolare $\sum_{k=0}^6 3 \cdot 2^k$. Per linearità e somma geometrica,

$$3 \sum_{k=0}^6 2^k = 3 \frac{1-2^7}{1-2} = 3 \cdot 127 = 381.$$

Fattoriale e teorema del binomio

Definizione – Fattoriale (Def. 7.6)

Il fattoriale è definito ricorsivamente da

$$0! = 1, \quad (n+1)! = (n+1)n!.$$

Per $n \geq 1$, dunque, $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

Definizione – Coefficiente binomiale (Def. 7.7)

Per $0 \leq k \leq n$ si pone

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Esso conta i sottoinsiemi di k elementi di un insieme con n elementi.

Proposizione – Proprietà dei coefficienti binomiali (Prop. 7.8)

Per $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Se $1 \leq k \leq n$, vale la relazione di Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Teorema – Teorema del binomio (Teo. 7.9)

Per $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Dimostrazione

Per $n = 0$ la formula vale. Moltiplicando l'ipotesi induttiva per $a + b$, si raccolgono i coefficienti delle potenze $a^{n+1-k}b^k$. La relazione di Pascal mostra che ciascun coefficiente è $\binom{n+1}{k}$. $\square$

Insiemi finiti e infiniti

Definizione – Equipotenza (Def. 7.10)

Due insiemi A, B sono equipotenti, e si scrive $A \sim B$, se esiste una biezione $A \rightarrow B$.

Definizione – Insieme finito (Def. 7.11)

Un insieme A è finito se è vuoto oppure esiste $n \in \mathbb{N}^*$ tale che $A \sim \{1, \dots, n\}$. Tale n è unico e si chiama cardinalità di A , indicata con $|A|$. Un insieme non finito è infinito.

Teorema – Operazioni su insiemi finiti (Teo. 7.12)

Siano A, B finiti. Allora $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$ e ogni sottoinsieme di A sono finiti. Inoltre

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \quad |A \times B| = |A| |B|.$$

Ogni funzione iniettiva da un insieme finito in se stesso è bigettiva.

Teorema – Caratterizzazione di Dedekind (Teo. 7.13)

Un insieme A è infinito se e solo se è equipotente a un suo sottoinsieme proprio.

Insiemi numerabili

Definizione – Numerabilità (Def. 7.14)

Un insieme è numerabile se è equipotente a $\mathbb{N}$. Si dice al più numerabile se è finito o numerabile.

Teorema – Stabilità della numerabilità (Teo. 7.15)

Ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile. Il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili e l'unione di una famiglia numerabile di insiemi al più numerabili sono al più numerabili.

Teorema – Numerabilità di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ (Teo. 7.16)

Gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili.

Nota Enumerazioni concrete

Gli interi si possono elencare come $0, 1, -1, 2, -2, \dots$. Le coppie $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ si percorrono per diagonali; la mappa $(m, n) \mapsto m/n$ e' suriettiva su $\mathbb{Q}$, e una selezione delle prime occorrenze fornisce un'enumerazione senza ripetizioni.

Insiemi infiniti non numerabili

Teorema – Teorema di Cantor (Teo. 7.17)

Per ogni insieme A non esiste una bigezione $A \rightarrow \mathcal{P}(A)$. In particolare $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Dimostrazione

Data una qualunque funzione $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, si consideri

$$D = \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

Se fosse $D = f(d)$, si avrebbe $d \in D \iff d \notin f(d) = D$, assurdo. Quindi f non e' suriettiva. $\square$

Proposizione – Non numerabilita' di $\mathbb{R}$ (Prop. 7.18)

L'insieme $\mathbb{R}$ non e' numerabile. Gia' l'intervallo $(0, 1)$ e' non numerabile.

Complementi: dimostrazioni sulla cardinalita'

Proposizione – Aritmetica delle cardinalita' finite (Prop. 7.19)

Se $|A| = m$ e $|B| = n$, allora

$$|A \times B| = mn, \quad |B^A| = n^m, \quad |\mathcal{P}(A)| = 2^m,$$

dove B^A e' l'insieme delle funzioni da A in B .