

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 8: Numeri complessi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Campo complesso · Modulo e coniugio · Forma trigonometrica · Radici

Indice

1	Introduzione	1
2	Il campo dei numeri complessi	1
3	Forma trigonometrica dei numeri complessi	2
4	Radice n-esima di un numero complesso	3
5	Equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$	3
6	Esercizi	4

Introduzione

L'equazione reale $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni perché $x^2 \geq 0$. I numeri complessi ampliano $\mathbb{R}$ introducendo un elemento i tale che $i^2 = -1$ e rendono risolubili tutte le equazioni polinomiali non costanti.

Il campo dei numeri complessi

Definizione – Numeri complessi (Def. 8.1)

L'insieme dei numeri complessi è

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1.$$

Per $z = a + ib$ si pongono $\operatorname{Re} z = a$ e $\operatorname{Im} z = b$. Due complessi sono uguali se e solo se hanno uguali parte reale e parte immaginaria.

Somma e prodotto sono definiti da

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Con queste operazioni $\mathbb{C}$ è un campo e contiene $\mathbb{R}$ come sottocampo. Non esiste però su $\mathbb{C}$ un ordine totale compatibile con le operazioni di campo: altrimenti sia $i^2 = -1$ sia $1^2 = 1$ dovrebbero essere positivi.

Definizione – Coniugato (Def. 8.2)

Il coniugato di $z = a + ib$ è

$$\bar{z} = a - ib.$$

Proposizione – Proprietà del coniugio (Prop. 8.3)

Per $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}.$$

Inoltre $z \in \mathbb{R}$ se e solo se $z = \bar{z}$ e

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Definizione – Modulo (Def. 8.4)

Il modulo di $z = a + ib$ è

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Geometricamente è la distanza del punto (a, b) dall'origine nel piano complesso.

Proposizione – Proprieta' del modulo (Prop. 8.5)

Per $z, w \in \mathbb{C}$,

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad |zw| = |z||w|, \quad |z+w| \leq |z| + |w|.$$

Se $z \neq 0$, allora

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad \frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} \quad (w \neq 0).$$

Esercizio Svolto

Calcoliamo

$$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5i}{5} = i.$$

La moltiplicazione per il coniugato rende reale il denominatore.

Forma trigonometrica dei numeri complessi

Definizione – Argomento e forma trigonometrica (Def. 8.6)

Se $z \neq 0$, posto $\rho = |z| > 0$, esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Ogni tale θ e' un argomento di z ; tutti gli argomenti sono $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La coppia (ρ, θ) e' una forma polare del numero complesso.

Proposizione – Prodotto e quoziente in forma trigonometrica (Prop. 8.7)

Siano $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, con $z, w \neq 0$. Allora

$$zw = \rho r (\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)),$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r} (\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi)).$$

Proposizione – Formula di De Moivre (Prop. 8.8)

Per $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[\rho(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

Esercizio Svolto

Poiche' $1+i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$, De Moivre da'

$$(1+i)^5 = (\sqrt{2})^5 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -4(1+i).$$

Radice n -esima di un numero complesso

Definizione – Radice complessa (Def. 8.9)

Siano $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Un numero $z \in \mathbb{C}$ è una radice n -esima di w se $z^n = w$.

Teorema – Radici n -esime (Teo. 8.10)

Sia $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ e sia $n \in \mathbb{N}^*$. Le sue radici n -esime sono esattamente n numeri distinti

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Sono i vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{r}$.

Dimostrazione

Scrivendo $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e usando De Moivre, la condizione $z^n = w$ equivale a

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Le classi $k = 0, \dots, n-1$ danno tutte e sole le soluzioni distinte. $\square$

Proposizione – Radici dell'unità' (Prop. 8.11)

Le soluzioni di $z^n = 1$ sono

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Posto $\omega = \omega_1$, si ha $\omega_k = \omega^k$.

Equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$

Teorema – Formula risolutiva (Teo. 8.12)

Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ e sia $\delta \in \mathbb{C}$ una radice quadrata del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Le soluzioni di

$$az^2 + bz + c = 0$$

sono

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Se $\Delta = 0$ coincidono; altrimenti sono distinte.

Dimostrazione

Completando il quadrato,

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a(z - z_1)(z - z_2).$$

La legge di annullamento del prodotto fornisce le due soluzioni. □

Esercizi

Esercizio Svolto

Risolvere $z^2 + \bar{z} = 0$. Oltre a $z = 0$, per $z \neq 0$ il confronto dei moduli da' $|z| = 1$. Moltiplicando l'equazione per z si ottiene $z^3 = -|z|^2 = -1$. Le tre soluzioni non nulle sono quindi

$$z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

L'insieme completo delle soluzioni e' $\{0, z_0, z_1, z_2\}$.