

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 9: Funzioni reali

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Operazioni · Ordine puntuale · Estremi · Monotonia · Simmetrie

Indice

1	Introduzione	1
2	L'anello ordinato delle funzioni reali	1
3	Estremi di funzioni reali	2
4	Funzioni reali monotone	2
5	Trasformazioni di funzioni e simmetrie	3

Introduzione

Una funzione reale assegna a ogni elemento del dominio un numero reale. In questo capitolo si trasferiscono alle funzioni le operazioni, l'ordine e le nozioni di estremo già introdotte per i numeri e per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Quando il dominio è contenuto in $\mathbb{R}$, la funzione è detta reale di variabile reale; quando il dominio è $\mathbb{N}$, si ottiene una successione reale.

L'anello ordinato delle funzioni reali

Definizione – Funzione reale (Def. 9.1)

Sia $A \neq \emptyset$. Una funzione reale definita su A è una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. L'insieme di tutte queste funzioni si indica con $\mathbb{R}^A$. Se $A \subseteq \mathbb{R}$, f è una funzione reale di una variabile reale.

Per $f, g \in \mathbb{R}^A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si definiscono, punto per punto,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Le funzioni costanti 0 e 1 sono gli elementi neutri. Con somma e prodotto $\mathbb{R}^A$ è un anello commutativo unitario. Il reciproco $1/f$ esiste su tutto A precisamente quando $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$.

Definizione – Ordine puntuale (Def. 9.2)

Per $f, g \in \mathbb{R}^A$ si pone

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A.$$

Questo ordine è in generale parziale, non totale. Esso è compatibile con la somma e con il prodotto per funzioni non negative.

Le operazioni reticolari sono

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Si definiscono inoltre

$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- = (-f) \vee 0, \quad |f| = f \vee (-f),$$

e valgono $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

Esercizio Svolto

Su $A = [-1, 1]$ siano $f(x) = x$ e $g(x) = -x$. Le due funzioni non sono confrontabili nell'ordine puntuale: per $x > 0$ vale $g(x) < f(x)$, mentre per $x < 0$ vale $f(x) < g(x)$. Si ha invece

$$f \vee g = |x|, \quad f \wedge g = -|x|.$$

Questo mostra concretamente perché l'ordine di $\mathbb{R}^A$ non è totale.

Estremi di funzioni reali

Definizione – Limitatezza (Def. 9.3)

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata superiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$; è limitata inferiormente se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq f(x)$ per ogni $x \in A$. È limitata se valgono entrambe le condizioni, equivalentemente se

$$\exists C > 0 \quad |f(x)| \leq C \quad \forall x \in A.$$

Definizione – Estremo superiore e inferiore (Def. 9.4)

Se f è limitata superiormente o inferiormente, si pone

$$\sup_A f = \sup f(A), \quad \inf_A f = \inf f(A).$$

Proposizione – Caratterizzazioni (Prop. 9.5)

Per $\lambda \in \mathbb{R}$ valgono

$$\lambda = \sup_A f \iff \begin{cases} f(x) \leq \lambda & \forall x \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A : f(x_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon, \end{cases}$$

e, dualmente,

$$\lambda = \inf_A f \iff \begin{cases} \lambda \leq f(x) & \forall x \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A : f(x_\varepsilon) < \lambda + \varepsilon. \end{cases}$$

Definizione – Massimi, minimi e punti estremanti (Def. 9.6)

$M = \max_A f$ se $M \in f(A)$ e $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$. Ogni $\bar{x} \in A$ tale che $f(\bar{x}) = M$ è un punto di massimo globale. Analogamente si definiscono $\min_A f$ e i punti di minimo globale.

Il valore massimo, se esiste, è unico; i punti in cui è assunto possono essere molti. Per esempio $\sin x$ ha massimo 1 in tutti i punti $\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Invece $\sup_{x \in (0,1)} x = 1$, ma il massimo non esiste perché 1 non appartiene all'immagine.

Funzioni reali monotone

Definizione – Monotonia (Def. 9.7)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- f è crescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f è decrescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$;

- e' strettamente crescente o strettamente decrescente se le disuguaglianze corrispondenti sono strette.

Proposizione – Composizione di monotone (Prop. 9.8)

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(A) \subseteq B$. Se f e g hanno lo stesso verso di monotonia, $g \circ f$ e' crescente; se hanno verso opposto, $g \circ f$ e' decrescente. Le conclusioni sono strette quando entrambe le funzioni sono strettamente monotone.

Proposizione – Inversa di una funzione monotona (Prop. 9.9)

Ogni funzione strettamente monotona e' iniettiva. L'inversa $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ conserva il verso: e' strettamente crescente se f lo e', e strettamente decrescente se f lo e'.

Dimostrazione

Supponiamo f strettamente crescente. Se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2)$, quindi valori uguali possono provenire solo dallo stesso punto: f e' iniettiva. Se $y_1 < y_2$ e $x_i = f^{-1}(y_i)$, non puo' essere $x_1 \geq x_2$, perche' la crescita darebbe $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$. Dunque $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Il caso decrescente e' analogo. $\square$

Trasformazioni di funzioni e simmetrie

Per $u, v \in \mathbb{R}$, il grafico di $g(x) = f(x - u) + v$ si ottiene traslando quello di f del vettore (u, v) . I grafici di $f(-x)$, $-f(x)$ e $-f(-x)$ sono le riflessioni rispetto all'asse y , all'asse x e all'origine.

Definizione – Funzioni pari e dispari (Def. 9.10)

Su un dominio simmetrico rispetto all'origine, f e' pari se $f(-x) = f(x)$ ed e' dispari se $f(-x) = -f(x)$ per ogni x del dominio.

Definizione – Periodicita' (Def. 9.11)

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e' periodica di periodo $p > 0$ se $A + p = A$ e

$$f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

Completando il quadrato,

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad a \neq 0,$$

si riconosce la parabola come traslata di ax^2 e si leggono subito asse e vertice.