

Appunti di Fondamenti di Comunicazioni e Internet

Canali 1 e 2 · Segnali · Prof.ssa Tiziana Cattai

Capitolo 3: Trasformata di Fourier

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Analisi e sintesi · rect e sinc · simmetrie · linearità e dualità
Scalatura, traslazione e modulazione · impulso, costante, coseno e seno
Convoluzione e prodotto · tri e sinc² · segnali periodici e treno di impulsi

Indice

1	Trasformata e antitrasformata	1
2	Trasformata della rect	2
3	Proprietà	3
3.1	Simmetrie	3
3.2	Linearità e dualità	3
3.3	Scalatura	4
3.4	Traslazione e modulazione	4
4	Trasformate notevoli	5
5	Convoluzione e prodotto	7
6	Segnali periodici	8
7	Esercizi	10
8	Soluzioni	11

1 Trasformata e antitrasformata

Definizione – Trasformata di Fourier

La **trasformata di Fourier** di un segnale a tempo continuo $x(t)$ è il segnale $X(f)$, funzione della frequenza $f \in \mathbb{R}$:

$$X(f) = \text{FT}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

L'**antitrasformata** riporta da $X(f)$ a $x(t)$:

$$x(t) = \text{FT}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Si scrive $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ e si parla di **coppia** trasformata e antitrasformata.

La trasformata è l'operazione di **analisi**: scompone $x(t)$ in componenti alle frequenze f . L'antitrasformata è la **sintesi**: ricompone $x(t)$ sommando quelle componenti. Le lettere minuscole indicano i segnali nel tempo, le maiuscole le loro trasformate.

La frequenza viene dall'esponenziale complesso. Per la formula di Eulero $e^{-j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)$: moltiplicare $x(t)$ per l'esponenziale significa confrontarlo con un coseno e un seno che oscillano alla frequenza f . $X(f)$ dice quanto pesa in $x(t)$ la componente armonica a quella frequenza, per ogni f reale.

Nota – Quando si applica

- La definizione vale per i segnali a tempo continuo (CTFT, *continuous time Fourier transform*); non si applica alle sequenze.
- L'integrale converge per i segnali **impulsivi** (Capitolo 2), con $\int |x(t)| dt < +\infty$: infatti $|X(f)| \leq \int |x(t)| dt$.
- Costante, coseno e seno non sono impulsivi: le loro trasformate contengono impulsi e si ricavano dalle proprietà (Sezione 4).

In generale $X(f)$ è complessa anche quando $x(t)$ è reale, perché nell'integrale c'è un esponenziale complesso. Le simmetrie della Sezione 3 dicono quando è reale.

2 Trasformata della rect

Proposizione – Rect e sinc

Per una rect larga T e alta 1:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T \text{sinc}(fT), \quad \text{rect}(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(f).$$

Dimostrazione

1. La rect vale 1 fra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$ e 0 fuori:

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f} = \frac{1}{\pi f} \cdot \frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j}.$$

2. Per la formula di Eulero $\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$, con $z = \pi fT$:

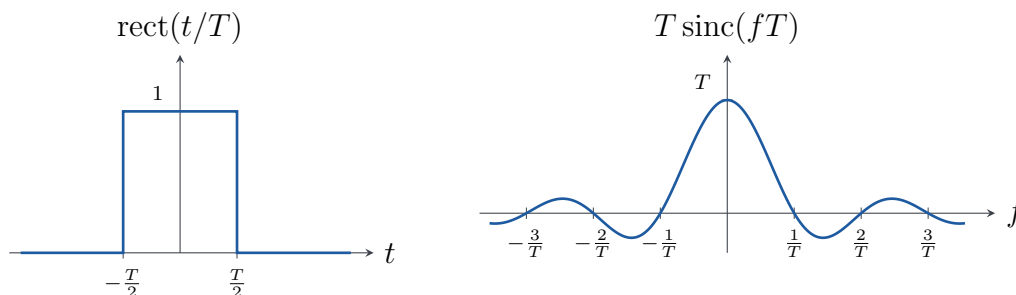
$$X(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \text{sinc}(fT),$$

moltiplicando e dividendo per T . In $f = 0$ l'integrale vale T , come $T \text{sinc}(0)$.

3. Con $T = 1$ si ha $\text{rect}(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(f)$.

□

La trasformata è una sinc nella variabile f , scalata in verticale e in orizzontale: in $f = 0$ vale T , l'area della rect, e si annulla nei multipli non nulli di $1/T$. Più la rect è stretta, più la sinc è larga. Altri casi nell'Esercizio 1.



3 Proprietà

3.1 Simmetrie

Proposizione – Simmetrie della trasformata

1. Se $x(t)$ è reale, $X(-f) = X^*(f)$: la parte reale di X è pari, la parte immaginaria è dispari (**simmetria hermitiana**).
2. Se $x(t)$ è reale e pari, $X(f)$ è reale e pari.

Dimostrazione

Con la formula di Eulero la definizione diventa

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt.$$

1. Con x reale i due integrali sono la parte reale e quella immaginaria. Il coseno è pari in f e il seno è dispari, quindi la prima è pari e la seconda dispari.
2. Con x anche pari, $x(t) \sin(2\pi ft)$ è dispari in t e il suo integrale è nullo: X è reale, e pari per il punto 1.

□

La rect, la sinc, l'impulso e la costante sono reali e pari, e lo sono anche le loro trasformate. Un segnale reale ma non pari ha in generale una trasformata complessa: per esempio la rect traslata (Sezione 3.4).

3.2 Linearità e dualità

Proposizione – Linearità

Per ogni coppia di costanti a, b :

$$\text{FT}\{a x(t) + b y(t)\} = a X(f) + b Y(f).$$

Lo stesso vale per l'antitrasformata.

Proposizione – Dualità

Da una coppia se ne ottiene un'altra, con i ruoli scambiati:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \implies X(t) \longleftrightarrow x(-f).$$

Se x è pari, $x(-f) = x(f)$ e lo scambio è diretto: $X(t) \longleftrightarrow x(f)$.

Dimostrazione

Si scrive l'antitrasformata con la variabile di integrazione ν e si valuta in $-f$:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{-j2\pi\nu f} d\nu.$$

Rinominando ν in t , è la trasformata di $X(t)$ calcolata in f . □

La dualità dimezza il lavoro: basta calcolare la più semplice delle due trasformate. Dalla rect, pari, si ha subito

$$\text{sinc}(t) \longleftrightarrow \text{rect}(f).$$

3.3 Scalatura**Proposizione – Scalatura**

Per ogni $\alpha \neq 0$:

$$x(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

Dimostrazione

Sia $\alpha > 0$. Con $t' = \alpha t$ si ha $t = t'/\alpha$ e $dt = dt'/\alpha$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} t'} dt' = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

Per $\alpha < 0$ gli estremi si scambiano e il segno meno che ne nasce dà $1/|\alpha|$. □

Comprimere il segnale nel tempo di un fattore $\alpha > 1$ allarga la trasformata dello stesso fattore e ne divide l'ampiezza per α . La coppia della rect larga T ne è un caso: $\text{rect}(t/T)$ è $\text{rect}(\alpha t)$ con $\alpha = 1/T$, e $T \text{sinc}(fT)$ è $\frac{1}{\alpha} \text{sinc}(f/\alpha)$.

3.4 Traslazione e modulazione**Proposizione – Traslazione nel tempo e in frequenza**

1. Una **traslazione nel tempo** moltiplica la trasformata per un esponenziale complesso:

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0}.$$

2. Moltiplicare il segnale per un esponenziale complesso (**modulazione**) trasla la trasformata:

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0).$$

Dimostrazione

1. Con $t' = t - t_0$, $dt' = dt$, l'esponenziale si divide in due fattori e quello costante esce dall'integrale:

$$\int x(t') e^{-j2\pi f(t'+t_0)} dt' = e^{-j2\pi f t_0} \int x(t') e^{-j2\pi f t'} dt' = e^{-j2\pi f t_0} X(f).$$

2. Si sommano gli esponenti:

$$\int x(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int x(t) e^{-j2\pi (f-f_0)t} dt = X(f-f_0).$$

□

I segni vanno tenuti: t_0 e f_0 entrano con il loro segno, e nelle due formule gli esponentziali hanno segni opposti. Nel dubbio si rifà il cambio di variabile, che è breve.

Esempio – Rect traslata, sinc traslata, rect modulata

- $\text{rect}(t-t_0) \longleftrightarrow \text{sinc}(f) e^{-j2\pi f t_0}$: la trasformata è complessa, perché la rect traslata non è più pari.
- $\text{sinc}(t+5) \longleftrightarrow \text{rect}(f) e^{j10\pi f}$: qui $t_0 = -5$, quindi l'esponente ha il segno più.
- $\text{rect}(t) e^{j10\pi t} = \text{rect}(t) e^{j2\pi \cdot 5t} \longleftrightarrow \text{sinc}(f-5)$: la frequenza è $f_0 = 5$, non 10.

Altri casi nell'Esercizio 2.

4 Trasformate notevoli

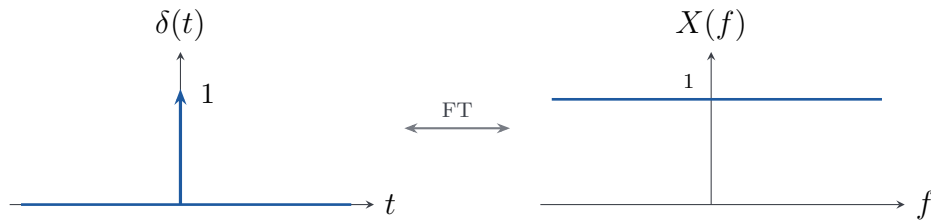
Proposizione – Impulso e costante

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1, \quad C \longleftrightarrow C \delta(f), \quad \delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}, \quad e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f-f_0).$$

Dimostrazione

1. Per la proprietà di campionamento, $\int \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt$ vale l'esponenziale in $t = 0$, cioè 1.
2. L'impulso è pari: per dualità $1 \longleftrightarrow \delta(f)$, e per linearità $C \longleftrightarrow C \delta(f)$.
3. La terza è la traslazione nel tempo applicata a $\delta(t)$.
4. La quarta è la modulazione applicata a $x(t) = 1$, che ha $X(f) = \delta(f)$.

□



Proposizione – Coseno e seno

$$A \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0),$$

$$A \sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow -j \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + j \frac{A}{2} \delta(f + f_0).$$

Dimostrazione

1. Con le formule di Eulero

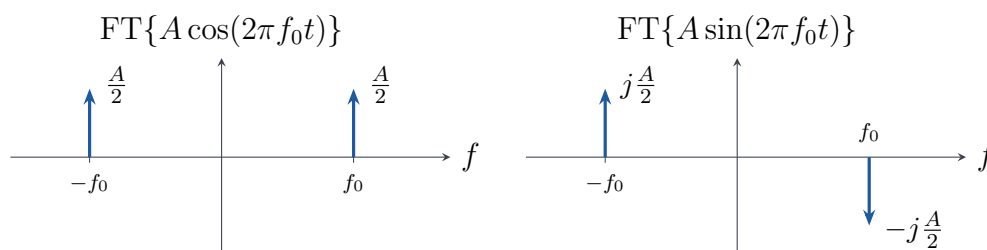
$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j},$$

con $z = 2\pi f_0 t$ coseno e seno diventano somme di due esponenziali complessi, alle frequenze f_0 e $-f_0$.

2. Per linearità ogni esponenziale dà un impulso: $e^{\pm j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f \mp f_0)$.
3. Per il seno resta il fattore $\frac{A}{2j}$; moltiplicando numeratore e denominatore per j , con $j^2 = -1$, diventa $-j \frac{A}{2}$.

□

Il coseno, reale e pari, ha una trasformata reale e pari: due impulsi di area $\frac{A}{2}$ in $\pm f_0$. Il seno, reale e dispari, ha una trasformata immaginaria: due impulsi di area $\mp j \frac{A}{2}$ in $\pm f_0$, coerenti con la simmetria hermitiana. Esempi numerici nell'Esercizio 3.



Osservazione – Tempo e frequenza

Un segnale breve nel tempo ha una trasformata larga in frequenza, e viceversa.

- L'impulso, di durata nulla, ha trasformata costante, di durata infinita; la costante ha come trasformata un impulso.
- La rect, di durata finita, ha come trasformata una sinc, di durata infinita in senso stretto, con zeri più radi se la rect è più stretta.
- Il coseno, di durata infinita, ha come trasformata due impulsi.

La scalatura lo dice in generale: comprimere x di un fattore α allarga X dello stesso fattore.

5 Convoluzione e prodotto**Teorema – Convoluzione e prodotto**

La convoluzione nel tempo diventa un prodotto in frequenza, e il prodotto nel tempo diventa una convoluzione in frequenza:

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(f) Y(f), \quad x(t) y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f).$$

Dimostrazione

Si scrive la trasformata della convoluzione e si scambia l'ordine degli integrali:

$$\int \left[\int x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt = \int x(\tau) \left[\int y(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau.$$

L'integrale interno è la trasformata di y traslato di τ , cioè $Y(f) e^{-j2\pi f\tau}$. Resta $Y(f) \int x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = X(f) Y(f)$. La seconda formula si ottiene allo stesso modo partendo dall'antitrasformata. $\square$

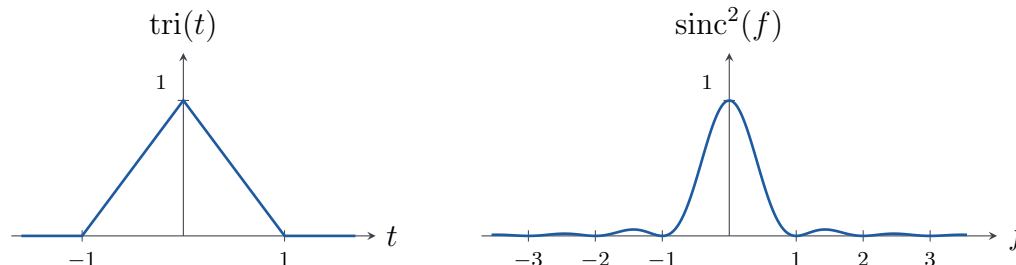
Per calcolare una convoluzione si può quindi trasformare i due segnali, moltiplicare le trasformate e antitrasformare: un prodotto è molto più semplice del calcolo grafico del Capitolo 2.

Proposizione – Tri e sinc al quadrato

$$\text{tri}(t) \longleftrightarrow \text{sinc}^2(f), \quad \text{sinc}^2(t) \longleftrightarrow \text{tri}(f).$$

Dimostrazione

Nel Capitolo 2 si è visto che $\text{tri}(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t)$. Per il teorema la trasformata è $\text{sinc}(f) \cdot \text{sinc}(f) = \text{sinc}^2(f)$. La tri è pari, quindi per dualità $\text{sinc}^2(t) \longleftrightarrow \text{tri}(f)$. $\square$



6 Segnali periodici

Proposizione – Serie di Fourier

Sia $x(t)$ periodico di periodo T_0 , con **frequenza fondamentale** $f_0 = 1/T_0$ e **armoniche** $f_n = n f_0$, n intero. Allora x è una somma di esponenziali complessi alle armoniche:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi f_n t}, \quad X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt.$$

I pesi X_n sono i **coefficienti della serie di Fourier**.

L'integrale per X_n si fa su un solo periodo, normalizzato per la sua durata, come la potenza dei segnali periodici nel Capitolo 2.

Proposizione – Trasformata di un segnale periodico

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - n f_0) :$$

impulsi nelle armoniche, con aree uguali ai coefficienti della serie.

Dimostrazione

Si trasforma la serie. Per linearità la trasformata entra nella somma, e ogni esponenziale $e^{j2\pi f_n t}$ ha come trasformata $\delta(f - f_n)$ (Sezione 4):

$$\text{FT}\left\{\sum_n X_n e^{j2\pi f_n t}\right\} = \sum_n X_n \text{FT}\{e^{j2\pi f_n t}\} = \sum_n X_n \delta(f - n f_0).$$

□

Gli impulsi $\delta(f - n f_0)$ sono gli stessi per ogni segnale di periodo T_0 : per trasformare un segnale periodico basta calcolarne i coefficienti X_n . Per il coseno $A \cos(2\pi f_0 t)$ i coefficienti sono $X_{\pm 1} = \frac{A}{2}$ e gli altri nulli, e si ritrova la coppia della Sezione 4.

Proposizione – Trasformata del treno di impulsi

Il treno di impulsi matematici $\Gamma_{T_0}(t) = \sum_k \delta(t - kT_0)$ (Capitolo 2) ha come trasformata un treno di impulsi in frequenza, di periodo $f_0 = 1/T_0$ e area f_0 :

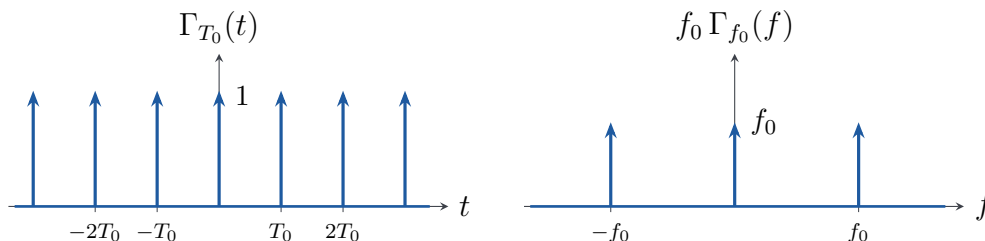
$$\Gamma_{T_0}(t) \longleftrightarrow f_0 \Gamma_{f_0}(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0).$$

Dimostrazione

Basta calcolare i coefficienti. Fra $-\frac{T_0}{2}$ e $\frac{T_0}{2}$ il treno ha un solo impulso, $\delta(t)$, e per la proprietà di campionamento

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T_0} e^0 = f_0$$

per ogni n . Nella trasformata del segnale periodico tutti gli impulsi hanno quindi area f_0 . □



Più gli impulsi sono fitti nel tempo, più sono radi in frequenza: il passo T_0 diventa $1/T_0$.

Riepilogo

- **Trasformata:** $X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ (analisi); $x(t) = \int X(f) e^{j2\pi ft} df$ (sintesi); per segnali a tempo continuo.
- **Simmetrie:** x reale $\Rightarrow X(-f) = X^*(f)$; x reale e pari $\Rightarrow X$ reale e pari.
- **Rect:** $\text{rect}(t/T) \longleftrightarrow T \text{sinc}(fT)$; $\text{sinc}(t) \longleftrightarrow \text{rect}(f)$ per dualità.
- **Linearità, dualità, scalatura:** $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$; $x(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X(f/\alpha)$.
- **Traslazione e modulazione:** $x(t-t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$; $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f-f_0)$.
- **Notevoli:** $\delta \leftrightarrow 1$; $C \leftrightarrow C\delta(f)$; $A \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{A}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$; seno con $\mp j\frac{A}{2}$.
- **Convoluzione e prodotto:** $x * y \leftrightarrow XY$, $xy \leftrightarrow X * Y$; $\text{tri}(t) \leftrightarrow \text{sinc}^2(f)$.
- **Periodici:** $X(f) = \sum_n X_n \delta(f - nf_0)$; $\Gamma_{T_0}(t) \leftrightarrow f_0 \Gamma_{f_0}(f)$, con $f_0 = 1/T_0$.

7 Esercizi

Esercizio 1 – Rect e sinc scalate

Calcola e disegna la trasformata di Fourier di (a) $x(t) = \text{rect}(t/2)$; (b) $x(t) = \text{sinc}(2t)$.

Soluzione a pagina 11 →

Esercizio 2 – Impulso e sinc traslati

Calcola la trasformata di Fourier, con modulo e fase, di (a) $x(t) = \delta(t - 1000)$; (b) $x(t) = \text{sinc}(t + 1)$.

Soluzione a pagina 11 →

Esercizio 3 – Seno e coseno

Calcola e disegna la trasformata di Fourier di (a) $x(t) = \sin(2\pi 5t)$; (b) $x(t) = \cos(2\pi 3t)$.

Soluzione a pagina 12 →

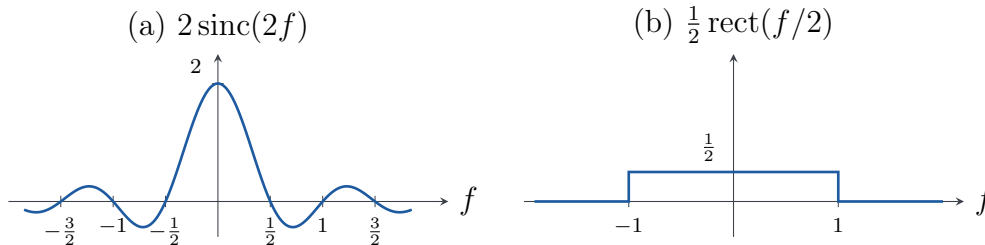
8 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Rect e sinc scalate

- (a) È la rect larga $T = 2$: $X(f) = 2 \operatorname{sinc}(2f)$. Vale 2 in $f = 0$ e si annulla in $f = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots$
- (b) Per dualità $\operatorname{sinc}(t) \longleftrightarrow \operatorname{rect}(f)$; per la scalatura con $\alpha = 2$

$$X(f) = \frac{1}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2}\right),$$

alta $\frac{1}{2}$ fra $f = -1$ e $f = 1$. Controllo: $X(0) = \frac{1}{2}$ è l'area di $\operatorname{sinc}(2t)$, metà di quella di $\operatorname{sinc}(t)$, che vale $\operatorname{rect}(0) = 1$.



← *Torna all'Esercizio 1, pagina 10*

Soluzione dell'Esercizio 2 – Impulso e sinc traslati

- (a) $\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$ con $t_0 = 1000$:

$$X(f) = e^{-j2000\pi f}.$$

Il modulo vale 1 per ogni f , come per l'impulso non traslato; la fase $-2000\pi f$ è una retta. La traslazione cambia solo la fase.

- (b) $\operatorname{sinc}(t) \longleftrightarrow \operatorname{rect}(f)$ e la traslazione è $t_0 = -1$:

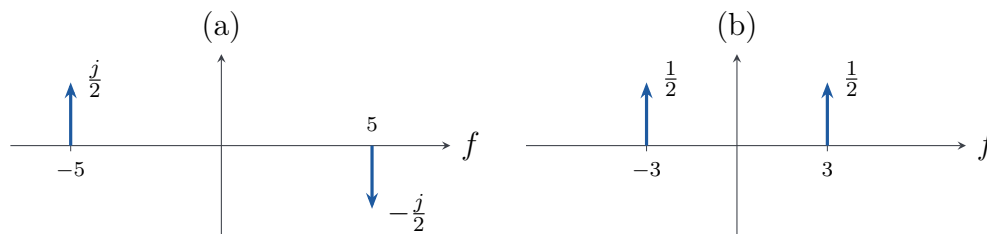
$$X(f) = \operatorname{rect}(f) e^{j2\pi f}.$$

Il modulo è $\operatorname{rect}(f)$: 1 per $|f| < \frac{1}{2}$, 0 fuori. Dove il modulo non è nullo la fase è la retta $2\pi f$, da $-\pi$ a π .

← *Torna all'Esercizio 2, pagina 10*

Soluzione dell'Esercizio 3 – Seno e coseno

- (a) Seno con $A = 1$ e $f_0 = 5$: $X(f) = -\frac{j}{2} \delta(f - 5) + \frac{j}{2} \delta(f + 5)$, due impulsi di area immaginaria, $\frac{j}{2}$ in -5 e $-\frac{j}{2}$ in 5 .
- (b) Coseno con $A = 1$ e $f_0 = 3$: $X(f) = \frac{1}{2} \delta(f - 3) + \frac{1}{2} \delta(f + 3)$, due impulsi di area $\frac{1}{2}$ in ± 3 .



← Torna all'Esercizio 3, pagina 10