

# Appunti di Fisica Classica

## Capitolo 1: Cinematica del Punto Materiale

**Autore: Tommaso C.**

---

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

---

Argomenti: Metodo scientifico · Grandezze fisiche · Sistemi di riferimento  
Velocità e accelerazione · Moti elementari · Moto circolare · Moto armonico · Moti  
relativi

## 0 Indice

|           |                                                                  |           |
|-----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Introduzione alla Fisica e Metodo Scientifico</b>             | <b>1</b>  |
| 1.1       | Le Quattro Forze Fondamentali . . . . .                          | 1         |
| 1.2       | Il Metodo Scientifico e Galileo Galilei . . . . .                | 1         |
| <b>2</b>  | <b>Grandezze Fisiche, Unità di Misura e Analisi Dimensionale</b> | <b>2</b>  |
| <b>3</b>  | <b>Sistemi di Riferimento Inerziali e Relatività Galileiana</b>  | <b>3</b>  |
| <b>4</b>  | <b>Cinematica del Punto Materiale</b>                            | <b>3</b>  |
| 4.1       | Vettore Posizione ed Equazioni del Moto . . . . .                | 4         |
| 4.2       | Spostamento . . . . .                                            | 4         |
| 4.3       | Velocità . . . . .                                               | 5         |
| 4.4       | Accelerazione . . . . .                                          | 6         |
| 4.5       | Componenti Tangenziale e Normale dell'Accelerazione . . . . .    | 6         |
| <b>5</b>  | <b>Moto Rettilineo Uniforme (MRU)</b>                            | <b>7</b>  |
| <b>6</b>  | <b>Moto Uniformemente Accelerato (MUA)</b>                       | <b>7</b>  |
| 6.1       | Equazioni Cardine (senza tempo) . . . . .                        | 7         |
| 6.2       | Caduta dei Gravi . . . . .                                       | 8         |
| 6.3       | Moto Parabolico (Composizione di Moti) . . . . .                 | 9         |
| <b>7</b>  | <b>Raggio di Curvatura e Cerchio Osculatore</b>                  | <b>10</b> |
| <b>8</b>  | <b>Moto Circolare</b>                                            | <b>10</b> |
| 8.1       | Cinematica del Moto Circolare . . . . .                          | 10        |
| 8.2       | Moto Circolare Uniforme (MCU) . . . . .                          | 11        |
| <b>9</b>  | <b>Moto Armonico Semplice (MAS)</b>                              | <b>11</b> |
| <b>10</b> | <b>Moti Relativi</b>                                             | <b>12</b> |
| 10.1      | Traslazione a Velocità Costante (Sistemi Inerziali) . . . . .    | 13        |
| 10.2      | Traslazione con Accelerazione (Sistemi Non Inerziali) . . . . .  | 13        |
| 10.3      | Sistema Mobile in Rotazione e Forza di Coriolis . . . . .        | 13        |
| <b>11</b> | <b>Esercizi Svolti</b>                                           | <b>14</b> |
| <b>12</b> | <b>Riepilogo delle Formule Principali</b>                        | <b>15</b> |

## 1 Introduzione alla Fisica e Metodo Scientifico

La **fisica** è la disciplina che studia la realtà tramite l'osservazione e la riproduzione in laboratorio dei fenomeni. Il suo scopo è ricavare leggi quantitative, cioè relazioni tra grandezze misurabili.

### Nota – Definizione operativa di Forza

In fisica, la **forza** è ciò che provoca una *variazione del vettore velocità* di un corpo. È essenziale tenere distinti concetti come forza, energia, potenza e velocità, che nel linguaggio comune vengono spesso usati come sinonimi.

### 1.1 Le Quattro Forze Fondamentali

Le interazioni fondamentali, tutte mediate da bosoni, sono:

1. **Gravità** — forza attrattiva tra corpi dotati di massa. È la più debole delle quattro ma ha raggio d'azione infinito.
2. **Elettromagnetismo** — forza tra cariche elettriche e magneti; responsabile di tutte le interazioni chimiche e della struttura della materia a scala macroscopica.
3. **Forza Nucleare Forte** — opera a corto raggio ( $\sim 10^{-15}$  m), tiene insieme i nucleoni nel nucleo atomico vincendo la repulsione elettrostatica tra i protoni.
4. **Forza Nucleare Debole** — coinvolta nei processi di decadimento radioattivo; a energie sufficientemente alte si unifica con l'elettromagnetismo nella *forza elettrodebole*.

Le prime due sono forze macroscopiche, osservabili quotidianamente; le ultime due operano a livello nucleare. L'unificazione progressiva di queste forze è uno dei grandi obiettivi della fisica teorica.

### 1.2 Il Metodo Scientifico e Galileo Galilei

Galileo Galilei (1564–1642) è considerato il padre del metodo scientifico sperimentale. I suoi contributi principali:

- **Uso del cannocchiale per l'astronomia:** osservazione di crateri e montagne sulla Luna (confutazione della perfezione aristotelica dei corpi celesti), scoperta delle quattro lune maggiori di Giove e delle fasi di Venere (conferma dell'eliocentrismo copernicano).
- **Sperimentazione quantitativa:** Galileo misurò il tempo con un orologio ad acqua (flusso costante proporzionale al tempo) e studiò la caduta dei gravi su piani inclinati per rallentare il moto e ridurre gli errori sperimentali.
- **Isolamento del fenomeno:** seppe separare l'effetto della gravità da quello dell'attrito e della resistenza dell'aria, comprendendo che in assenza di aria tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione.

**Nota – Dalla lezione del 23/02**

Galileo intuì che lo spostamento di un corpo in caduta libera è proporzionale al *quadrato* del tempo ( $L \propto t^2$ ), implicando un'accelerazione costante (non una velocità costante, come riteneva Aristotele). Questa intuizione è la pietra miliare della cinematica.

**2 Grandezze Fisiche, Unità di Misura e Analisi Dimensionale****Definizione – Grandezza Fisica (Def. 1.1)**

Una **grandezza fisica** è un'entità con una precisa definizione quantificabile attraverso la misura. Esempi: lunghezza, massa, tempo, velocità, accelerazione, forza, lavoro, energia, potenza.

Le grandezze fondamentali della meccanica nel **Sistema Internazionale (SI)** sono:

| Grandezza | Simbolo | Unità SI         |
|-----------|---------|------------------|
| Lunghezza | $L$     | metro (m)        |
| Massa     | $M$     | chilogrammo (kg) |
| Tempo     | $T$     | secondo (s)      |

Tutte le altre grandezze meccaniche (velocità, forza, energia, ...) sono **grandezze derivate**, esprimibili come prodotti di potenze delle tre fondamentali.

**Teorema – Principio di Omogeneità Dimensionale (Teo. 1.1)**

In ogni equazione fisica le grandezze ai due lati del segno di uguale devono avere le **stesse dimensioni**. Non è possibile sommare grandezze con dimensioni diverse.

**Nota – Attenzione!**

Le unità di misura devono essere standardizzate per permettere la riproducibilità dei risultati. Un errore nella conversione tra unità ha causato la perdita di una sonda della NASA su Marte (1999): il software di un contraente usava unità imperiali mentre gli altri sistemi si aspettavano unità SI.

**Osservazione – Definizione moderna delle unità**

Le unità fondamentali non sono più definite tramite campioni fisici (chilogrammo campione, metro campione) bensì tramite costanti fisiche universali: il metro tramite la velocità della luce  $c$ , il secondo tramite la frequenza di transizioni atomiche del Cesio-133. Questo garantisce massima precisione e riproducibilità ovunque nell'universo.

### 3 Sistemi di Riferimento Inerziali e Relatività Galileiana

#### Definizione – Sistema di Riferimento (Def. 1.2)

Un **sistema di riferimento** è un insieme di corpi rigidi rispetto ai quali si misurano posizioni e tempi. Si fissa una terna cartesiana ortogonale  $(x, y, z)$  e un'origine temporale.

#### Definizione – Sistema di Riferimento Inerziale (Def. 1.3)

Un **sistema di riferimento inerziale** è un sistema in cui vale il principio di inerzia: un corpo libero da forze si muove di moto rettilineo uniforme (o rimane in quiete).

#### Teorema – Relatività Galileiana (Teo. 1.2)

Tutti i sistemi in moto di *traslazione uniforme* rispetto a un sistema inerziale sono anch'essi inerziali. Le leggi della meccanica hanno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali.

La trasformazione di coordinate tra un sistema  $O$  e un sistema  $O'$  in moto con velocità  $v_0$  lungo  $x$  è:

$$x' = x - v_0 t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (1)$$

#### Nota – Dalla lezione del 25/02

Einstein estese il principio di relatività a *tutte* le leggi fisiche (non solo quelle meccaniche). Postulando la costanza della velocità della luce  $c$  in tutti i sistemi inerziali, ottenne le **trasformazioni di Lorentz** in luogo di (1), riconoscendo che il tempo non è assoluto. Per velocità  $v \ll c$  si recuperano le trasformazioni galileiane.

#### Nota – Esempio: il galeone di Galileo

All'interno di una stiva chiusa in moto rettilineo uniforme, nessun esperimento meccanico può rivelare lo stato di moto della nave. Questo è il principio di relatività nella sua forma originale.

### 4 Cinematica del Punto Materiale

#### Definizione – Punto Materiale (Def. 1.4)

Un **punto materiale** è un modello idealizzato in cui un corpo viene ridotto a un punto geometrico dotato di massa, trascurandone le dimensioni e la forma. È applicabile quando le dimensioni del corpo sono trascurabili rispetto alle distanze che intervengono nel problema.

**Nota – Dalla lezione del 25/02**

Anche corpi di dimensioni ragguardevoli (es. la Terra nella sua orbita attorno al Sole) possono essere trattati come punti materiali. In ogni sistema meccanico esiste sempre un punto speciale, il **centro di massa**, il cui moto segue le leggi del punto materiale.

La **cinematica** studia il moto degli oggetti indipendentemente dalle cause che lo producono.

**4.1 Vettore Posizione ed Equazioni del Moto****Definizione – Vettore Posizione (Def. 1.5)**

Il **vettore posizione**  $\mathbf{r}(t)$  parte dall'origine del sistema di riferimento e punta alla posizione del punto materiale al tempo  $t$ :

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (2)$$

Le funzioni  $x(t), y(t), z(t)$  sono le **equazioni parametriche del moto**.

**Definizione – Traiettoria (Def. 1.6)**

La **traiettoria** è la curva geometrica descritta dal punto materiale durante il suo moto. Si ottiene eliminando il parametro  $t$  dalle equazioni parametriche.

- Moto **rettilineo**: traiettoria è una retta.
- Moto **piano**: traiettoria giace su un piano.

**Definizione – Gradi di Libertà (Def. 1.7)**

Il numero di **gradi di libertà** è il numero minimo di coordinate indipendenti necessario a determinare univocamente la posizione del punto.

| Vincolo                        | Gradi di libertà |
|--------------------------------|------------------|
| Nessuno (spazio libero)        | 3                |
| Moto su una superficie fissata | 2                |
| Moto su una linea fissata      | 1                |

**4.2 Spostamento**

**Definizione – Spostamento (Def. 1.8)**

Lo **spostamento** nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  è il vettore:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k} \quad (3)$$

Lo spostamento dipende solo dalle posizioni iniziale e finale, non dal percorso seguito.

**4.3 Velocità****Definizione – Velocità Media (Def. 1.9)**

- **Velocità vettoriale media:**  $\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$
- **Velocità scalare media:**  $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ , dove  $\Delta s$  è la distanza percorsa lungo la traiettoria.

**Nota – Attenzione!**

Le due definizioni non coincidono in generale. In un moto di andata e ritorno allo stesso punto, la velocità *vettoriale* media è zero ( $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{0}$ ), ma quella scalare no. La velocità scalare misura il percorso effettivo.

**Definizione – Velocità Istantanea (Def. 1.10)**

La **velocità istantanea** è il limite della velocità vettoriale media per  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (4)$$

con componenti  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$ ,  $v_z = \dot{z}$ .

Le **dimensioni** sono  $[L T^{-1}]$ ; unità SI:  $m s^{-1}$ .

**Teorema – Direzione della Velocità (Teo. 1.3)**

La velocità istantanea è un vettore **tangente alla traiettoria** nel verso del moto. Il modulo  $v = |\mathbf{v}|$  coincide con la velocità scalare istantanea  $\dot{s}$ :

$$\mathbf{v}(t) = \dot{s}(t) \hat{\mathbf{t}} \quad (5)$$

dove  $\hat{\mathbf{t}}$  è il versore tangente orientato nel verso delle  $s$  crescenti.

#### 4.4 Accelerazione

##### Definizione – Accelerazione Istantanea (Def. 1.11)

L'**accelerazione istantanea** è la derivata prima del vettore velocità:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (6)$$

con componenti  $a_x = \ddot{x}$ ,  $a_y = \ddot{y}$ ,  $a_z = \ddot{z}$ .

Le **dimensioni** sono  $[L T^{-2}]$ ; unità SI:  $m s^{-2}$ .

##### Nota – Dalla lezione del 25/02

Un'accelerazione di  $3 m s^{-2}$  significa che la velocità *scalare* aumenta di 3 m/s ogni secondo. Attenzione: anche se il modulo della velocità è costante, una variazione di *direzione* della velocità implica accelerazione (es. moto circolare uniforme).

#### 4.5 Componenti Tangenziale e Normale dell'Accelerazione

Derivando  $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{t}}$  rispetto al tempo:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} \quad (7)$$

##### Definizione – Accelerazione Tangenziale e Normale (Def. 1.12)

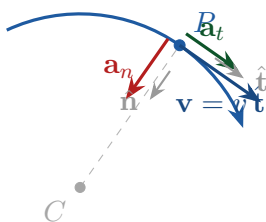
- **Componente tangenziale:**  $a_t = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$  — diretta lungo la tangente, legata alla variazione del modulo della velocità.
- **Componente normale (centripeta):**  $a_n = \frac{v^2}{R}$  — diretta verso il centro di curvatura (perpendicolare alla traiettoria), legata alla variazione di *direzione* della velocità. Vale sempre  $a_n \geq 0$ .

Il modulo dell'accelerazione totale è:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (8)$$

##### Nota – Attenzione!

La componente normale si annulla solo per  $R \rightarrow \infty$ , cioè quando la traiettoria è rettilinea. In un moto rettilineo esiste solo accelerazione tangenziale.



La componente tangenziale cambia il modulo di  $v$ , quella normale ne devia la direzione.

## 5 Moto Rettilineo Uniforme (MRU)

### Definizione – Moto Rettilineo Uniforme (Def. 1.13)

Un punto si muove di **moto rettilineo uniforme** se il vettore velocità è costante in modulo, direzione e verso:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 = \text{cost} \quad (9)$$

### Teorema – Equazioni del MRU (Teo. 1.4)

Nel moto rettilineo uniforme l'accelerazione è nulla e la posizione varia linearmente:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) \quad (10)$$

Il grafico  $x-t$  è una retta con pendenza pari alla velocità.

## 6 Moto Uniformemente Accelerato (MUA)

### Definizione – Moto Uniformemente Accelerato (Def. 1.14)

Un punto si muove di **moto uniformemente accelerato** se il vettore accelerazione è costante:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 = \text{cost} \quad (11)$$

### Teorema – Equazioni del MUA (Teo. 1.5)

Integrando l'accelerazione:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 (t - t_0) \quad (12)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 (t - t_0)^2 \quad (13)$$

dove  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{v}_0$  sono le condizioni iniziali al tempo  $t_0$ .

### 6.1 Equazioni Cardine (senza tempo)

In molti problemi il tempo non è noto né richiesto. Eliminando  $t$  tra (12) e (13) si ottengono due relazioni *indipendenti dal tempo*.

### Teorema – Prima Equazione Cardine (Teo. 1.6)

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (14)$$

**Dimostrazione**

Si parte dalle equazioni scalari con  $t_0 = 0$ :

$$v = v_0 + a t \implies t = \frac{v - v_0}{a}$$

Sostituendo nell'equazione della posizione:

$$x - x_0 = v_0 \left( \frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{a}{2} \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a}$$

Moltiplicando per  $2a$  e semplificando:

$$2a(x - x_0) = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v v_0 + v_0^2 = v^2 - v_0^2$$

□

**Teorema – Seconda Equazione Cardine (Teo. 1.7)**

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)(t - t_0) \quad (15)$$

**Dimostrazione**

Dalla (12) si ricava  $a = (v - v_0)/(t - t_0)$ . Sostituendo in (13):

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{v - v_0}{t - t_0} \cdot (t - t_0)^2 = (t - t_0) \left( v_0 + \frac{1}{2}(v - v_0) \right) = \frac{1}{2}(v_0 + v)(t - t_0)$$

□

**Osservazione**

Le cinque equazioni del MUA sono (12), (13), (14), (15) e la definizione  $a = \text{cost.}$  Ciascuna coinvolge quattro delle cinque grandezze  $\{x_0, v_0, a, t, v\}$ : scelto il problema, basta trovare la relazione che non contiene la variabile incognita o indesiderata.

**6.2 Caduta dei Gravi**

Un caso fondamentale di MUA è la caduta libera vicino alla superficie terrestre: l'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  è costante, diretta verso il basso, con modulo  $g \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

Scegliendo l'asse  $y$  orientato verso l'alto e  $t_0 = 0$ :

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (16)$$

$$v_y(t) = v_{0y} - g t \quad (17)$$

**Proposizione – Altezza Massima (Prop. 1.1)**

L'altezza massima si raggiunge quando  $v_y = 0$ :

$$t^* = \frac{v_{0y}}{g}, \quad h_{\max} = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

**Nota – Principio di Equivalenza**

Il **principio di equivalenza** stabilisce l'eguaglianza tra massa inerziale (resistenza alla variazione di velocità) e massa gravitazionale ("carica" che subisce l'attrazione gravitazionale). Conseguenza: tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione  $g$ , indipendentemente dalla massa. Gli astronauti in orbita non sono in assenza di gravità: sono in *caduta libera continua* — sia la navicella che gli astronauti cadono con la stessa accelerazione, quindi all'interno si percepisce l'assenza di peso.

**6.3 Moto Parabolico (Composizione di Moti)**

Un proiettile lanciato con velocità iniziale  $v_0$  a un angolo  $\alpha$  sopra l'orizzontale compie un **moto parabolico**: MRU orizzontale + MUA verticale.

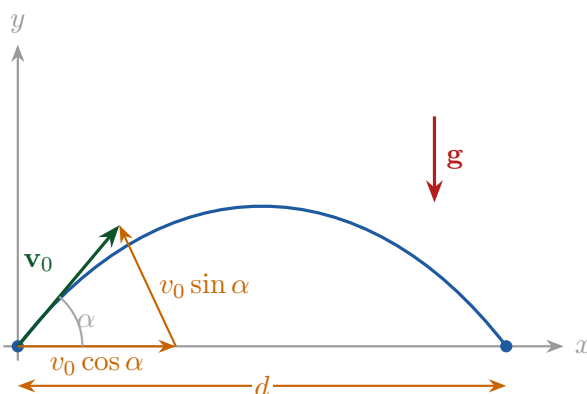
$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (18)$$

**Proposizione – Gittata Massima (Prop. 1.2)**

Quando il punto di lancio e il punto di caduta sono alla stessa quota:

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (19)$$

La gittata è **massima** per  $\alpha = 45^\circ$ .



*Il moto parabolico nasce dalla composizione di un moto uniforme orizzontale e di una caduta libera verticale.*

## 7 Raggio di Curvatura e Cerchio Osculatore

### Definizione – Cerchio Osculatore (Def. 1.15)

In ogni punto  $P$  di una traiettoria esiste la **circonferenza osculatrice**, che coincide localmente con la curva (stessa tangente e stessa curvatura). Il suo raggio  $R_c$  è il **raggio di curvatura**; il suo centro è il **centro di curvatura**.

### Teorema – Componente Normale — Caso Generale (Teo. 1.8)

Per qualsiasi moto su qualsiasi traiettoria:

$$a_n = \frac{v^2}{R_c} \quad (20)$$

$a_n$  è sempre non negativa e si annulla solo per  $R_c \rightarrow \infty$  (traiettoria rettilinea).

## 8 Moto Circolare

### 8.1 Cinematica del Moto Circolare

#### Definizione – Grandezze Angolari (Def. 1.16)

Per un moto su traiettoria circolare di raggio  $R$ :

- **Velocità angolare scalare:**  $\omega = \dot{\vartheta}$  [rad/s].
- **Relazione con la velocità lineare:**  $v = \omega R$ .
- **Accelerazione angolare:**  $\alpha = \dot{\omega}$  [rad/s<sup>2</sup>].
- **Vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ :** diretto perpendicolarmente al piano di rotazione (regola della mano destra), con  $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$ .

#### Teorema – Velocità e Accelerazione Vettoriale in Moto Circolare (Teo. 1.9)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (21)$$

$$\mathbf{a} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}}_{\mathbf{a}_t} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\mathbf{a}_n} \quad (22)$$

Il primo termine è l'**accelerazione tangenziale** ( $|\mathbf{a}_t| = \alpha R$ , tangente alla traiettoria); il secondo è l'**accelerazione normale** ( $|\mathbf{a}_n| = \omega^2 R = v^2/R$ , diretta verso il centro).

**Dimostrazione**

Derivando  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  rispetto al tempo con la regola del prodotto vettoriale:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Sostituendo  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ :

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Con il doppio prodotto vettoriale  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  e  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$  (vettori ortogonali), si ricava  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r}$ , diretto verso il centro.  $\square$

**8.2 Moto Circolare Uniforme (MCU)****Definizione – Moto Circolare Uniforme (Def. 1.17)**

Il moto è **circolare uniforme** se il modulo della velocità è costante ( $v = \omega R = \text{cost}$ ,  $\alpha = 0$ ). L'equazione oraria è lineare:

$$\vartheta(t) = \omega t + \vartheta_0$$

**Definizione – Periodo e Frequenza (Def. 1.18)**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}, \quad \nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu \quad (23)$$

**Teorema – Accelerazione nel MCU (Teo. 1.10)**

Nel moto circolare uniforme l'unica componente dell'accelerazione è quella **centripeta** (normale):

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \quad a_t = 0 \quad (24)$$

**9 Moto Armonico Semplice (MAS)****Definizione – Moto Armonico Semplice (Def. 1.19)**

Il **moto armonico semplice** è un moto oscillatorio rettilineo la cui equazione oraria è sinusoidale:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta_0) \quad (25)$$

dove:

- $A$  = **ampiezza** (massima elongazione dal centro);
- $\omega$  = **pulsazione** [rad/s];
- $\vartheta_0$  = **fase iniziale**.

### Teorema – Velocità e Accelerazione nel MAS (Teo. 1.11)

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \vartheta_0) \quad (26)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \vartheta_0) = -\omega^2 x(t) \quad (27)$$

La **proprietà fondamentale** del MAS è che l'accelerazione è *proporzionale e opposta* allo spostamento dal centro:

$$\boxed{a = -\omega^2 x} \quad (28)$$

### Nota – Sfasamenti nel MAS

Le tre grandezze  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$  hanno lo stesso periodo ma sono sfasate:

- $v$  è in anticipo di  $\pi/2$  su  $x$  (massima velocità al centro, nulla agli estremi).
- $a$  è in opposizione di fase con  $x$  (massima accelerazione agli estremi, nulla al centro).

### Teorema – MAS come Proiezione del MCU (Teo. 1.12)

Le proiezioni di un punto in moto circolare uniforme (raggio  $A$ , pulsazione  $\omega$ ) sugli assi  $x$  e  $y$  eseguono due moti armonici sfasati di  $\pi/2$ :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta_0), \quad y(t) = A \sin(\omega t + \vartheta_0) \quad (29)$$

Viceversa, ogni MAS può essere pensato come la proiezione di un MCU su un diametro.

## 10 Moti Relativi

### Definizione – Terminologia (Def. 1.20)

Dati due sistemi di riferimento:

- **Sistema fisso**  $O$ : le grandezze misurate in  $O$  si chiamano *assolute*.
- **Sistema mobile**  $O'$ : le grandezze in  $O'$  si chiamano *relative*.
- **Moto di trascinamento**: moto di  $O'$  rispetto a  $O$ .

La relazione tra i vettori posizione è:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_{O'} + \mathbf{r}' \quad (30)$$

### 10.1 Traslazione a Velocità Costante (Sistemi Inerziali)

#### Teorema – Composizione delle Velocità in Traslazione (Teo. 1.13)

Se  $O'$  trasla con velocità  $\mathbf{v}_{O'} = \text{cost}$ :

$$\mathbf{v}_{\text{ass}} = \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{O'} \quad (31)$$

Derivando ancora rispetto al tempo, con  $\dot{\mathbf{v}}_{O'} = 0$ :

$$\mathbf{a}_{\text{ass}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} \quad (32)$$

Le accelerazioni sono le stesse in tutti i sistemi inerziali: questo è il **principio di relatività galileiana**.

### 10.2 Traslazione con Accelerazione (Sistemi Non Inerziali)

Se  $O'$  accelera con  $\mathbf{a}_{O'} \neq \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{a}_{\text{ass}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{O'} \implies m \mathbf{a}_{\text{rel}} = m \mathbf{a}_{\text{ass}} - m \mathbf{a}_{O'} \quad (33)$$

#### Definizione – Forza Apparente (o Fittizia) (Def. 1.21)

Il termine  $\mathbf{F}_{\text{app}} = -m \mathbf{a}_{O'}$  è la **forza apparente** (o fittizia) che compare nelle equazioni del moto scritte in un sistema non inerziale. Non deriva da alcuna interazione fisica reale.

#### Nota – Esempi di forze apparenti

All'interno di un treno in frenata, un passeggero percepisce di essere "spinto in avanti": questa è la forza fittizia  $-m \mathbf{a}_{O'}$  (uguale e opposta alla decelerazione del treno). In realtà nessuna forza reale agisce sul passeggero: è il treno che rallenta sotto di lui.

### 10.3 Sistema Mobile in Rotazione e Forza di Coriolis

Quando il sistema mobile ruota con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ , nel calcolo dell'accelerazione assoluta compare un termine aggiuntivo:

#### Teorema – Accelerazione di Coriolis (Teo. 1.14)

$$\mathbf{a}_{\text{ass}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{trasc}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (34)$$

Il termine  $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$  è l'**accelerazione complementare di Coriolis**. Si annulla se  $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{0}$  oppure se  $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}_{\text{rel}}$ .

#### Nota – Differenza con la traslazione

Per la *velocità* la formula  $\mathbf{v}_{\text{ass}} = \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{trasc}}$  è valida sia per traslazione che per rotazione. L'accelerazione di Coriolis compare *solo* nel caso rotatorio.

## 11 Esercizi Svolti

### Esercizio – Moto parabolico: gittata e angolo ottimale

Un grave è lanciato con velocità  $v_0$  formando un angolo  $\varepsilon$  con l'orizzontale. Trovare la gittata  $d$  e determinare l'angolo che la massimizza.

*Soluzione.*

Componenti iniziali:  $v_{0x} = v_0 \cos \varepsilon$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin \varepsilon$ .

Tempo di volo (imponendo  $y(t_f) = 0$  con  $y_0 = 0$ ):

$$v_0 \sin \varepsilon \cdot t_f = \frac{1}{2} g t_f^2 \implies t_f = \frac{2v_0 \sin \varepsilon}{g}$$

Gittata:

$$d = v_{0x} \cdot t_f = \frac{v_0^2 \sin 2\varepsilon}{g}$$

Poiché  $\sin 2\varepsilon \leq 1$ , la gittata è massima per  $2\varepsilon = 90$ , cioè  $\boxed{\varepsilon = 45}$ .

### Esercizio – Moto circolare uniformemente accelerato

Un punto si muove su una traiettoria circolare di raggio  $R = 225$  m. Parte da fermo e percorre  $S = 150$  m in  $T_1 = 10$  s. Trovare il modulo dell'accelerazione all'istante  $T_1$ .

*Soluzione.*

Accelerazione tangenziale (costante, da MUA):

$$S = \frac{1}{2} a_t T_1^2 \implies a_t = \frac{2S}{T_1^2} = \frac{2 \times 150}{100} = 3 \text{ m s}^{-2}$$

Velocità a  $T_1$ :

$$v_1 = a_t T_1 = 3 \times 10 = 30 \text{ m s}^{-1}$$

Accelerazione normale a  $T_1$ :

$$a_n = \frac{v_1^2}{R} = \frac{900}{225} = 4 \text{ m s}^{-2}$$

Modulo totale:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \boxed{5 \text{ m s}^{-2}}$$

### Esercizio – Inseguimento auto-motocicletta

Un'auto viaggia a  $V_A = 180$  km/h. Un poliziotto in moto parte all'inseguimento con accelerazione  $a_M = 10 \text{ m s}^{-2}$  non appena l'auto gli passa davanti. Trovare la durata dell'inseguimento e la velocità della moto al raggiungimento.

*Soluzione.*

Conversione:  $V_A = 180/3,6 = 50 \text{ m s}^{-1}$ .

Equazioni orarie (con  $t_0 = 0$  all'istante di partenza):

$$x_A(t) = V_A t, \quad x_M(t) = \frac{1}{2} a_M t^2$$

Condizione di incontro  $x_A = x_M$ :

$$V_A t = \frac{1}{2} a_M t^2 \implies t\left(\frac{1}{2} a_M t - V_A\right) = 0$$

La soluzione non banale è:

$$t = \frac{2V_A}{a_M} = \frac{2 \times 50}{10} = \boxed{10 \text{ s}}$$

Velocità della moto all'incontro:

$$v_M = a_M \cdot t = 10 \times 10 = 100 \text{ m s}^{-1} = \boxed{360 \text{ km/h}}$$

### Esercizio – Motociclista che salta un fossato

Un motociclista salta un fossato di larghezza  $L = 10 \text{ m}$  partendo da una rampa inclinata di  $\alpha = 30^\circ$ . Trovare la velocità minima di lancio  $v_0$  e la massima altezza raggiunta.

*Soluzione.*

Moto parabolico con partenza e arrivo alla stessa quota.

Dalla formula (19):

$$v_0^2 = \frac{g L}{\sin 2\alpha} = \frac{9,81 \times 10}{\sin 60} = \frac{98,1}{\sqrt{3}/2} \approx 113,3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \implies v_0 \approx \boxed{10,6 \text{ m s}^{-1}}$$

Altezza massima:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{113,3 \times (0,5)^2}{2 \times 9,81} \approx \boxed{1,44 \text{ m}}$$

## 12 Riepilogo delle Formule Principali

## Riepilogo — Cinematica del Punto Materiale

|                                   |                                                                                                                                        |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Vettore posizione</b>          | $\mathbf{r}(t) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$                                                                           |
| <b>Velocità istantanea</b>        | $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad v =  \mathbf{v} $                                                                          |
| <b>Accelerazione</b>              | $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$                                                                     |
| <b>Acc. tangenziale / normale</b> | $a_t = \dot{v}, \quad a_n = v^2/R_c \geq 0$                                                                                            |
| <b>MRU</b>                        | $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$                                                                                           |
| <b>MUA — velocità</b>             | $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t$                                                                                             |
| <b>MUA — posizione</b>            | $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$                                                              |
| <b>Cardine 1</b>                  | $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$                                                                                                            |
| <b>Cardine 2</b>                  | $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v) t$                                                                                                     |
| <b>MCU</b>                        | $a_n = v^2/R = \omega^2 R, \quad T = 2\pi/\omega$                                                                                      |
| <b>Vel. circolare</b>             | $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$                                                                                   |
| <b>Acc. circolare</b>             | $\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$        |
| <b>MAS</b>                        | $x = A \cos(\omega t + \vartheta_0), \quad a = -\omega^2 x$                                                                            |
| <b>Comp. velocità (traslaz.)</b>  | $\mathbf{v}_{\text{ass}} = \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{O'}$                                                                  |
| <b>Coriolis</b>                   | $\mathbf{a}_{\text{ass}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{trasc}} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$ |