

Appunti di Fisica Classica

Elettromagnetismo 2.0 e onde

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: carica elettrica · campo e potenziale · legge di Gauss · conduttori e dielettrici ·
corrente · magnetismo · induzione · equazioni di Maxwell · correnti alternate · onde
elettromagnetiche

Indice

Premessa e convenzioni	1
1 Carica elettrica, forza elettrostatica e campo elettrostatico	1
1.1 Carica elettrica, isolanti e conduttori	1
1.2 Legge di Coulomb e sovrapposizione	2
1.3 Campo elettrico	2
1.4 Distribuzioni continue di carica	3
1.5 Linee di campo e moto di una carica	4
2 Lavoro elettrico, potenziale ed energia elettrostatica	4
2.1 Lavoro della forza elettrica	4
2.2 Energia potenziale elettrostatica	5
2.3 Campo come gradiente del potenziale	5
2.4 Dipolo elettrico	6
3 Legge di Gauss	6
3.1 Flusso del campo elettrico	6
3.2 Applicazioni principali	7
3.3 Potenziale di una sfera uniformemente carica	8
4 Conduttori, condensatori, dielettrici ed energia elettrostatica	8
4.1 Conduttori in equilibrio elettrostatico	8
4.2 Capacità di un conduttore isolato	9
4.3 Condensatori	9
4.4 Energia del campo elettrico	10
4.5 Dielettrici e polarizzazione	10
5 Corrente elettrica e circuiti in corrente continua	11
5.1 Corrente e densità di corrente	11
5.2 Legge di Ohm e modello microscopico	12
5.3 Resistori in serie e parallelo	12
5.4 Forza elettromotrice e resistenza interna	13
5.5 Circuiti RC	13
5.6 Corrente di spostamento	14
5.7 Leggi di Kirchhoff	14
6 Campo magnetico e forza magnetica	15
6.1 Campo magnetico e forza di Lorentz	15
6.2 Forza su un conduttore percorso da corrente	16
6.3 Momento su una spira e momento magnetico	16
6.4 Effetto Hall	16
6.5 Moto di una particella in campo magnetico uniforme	17
7 Sorgenti del campo magnetico, legge di Ampère e materia magnetica	17
7.1 Legge di Biot–Savart / prima legge di Laplace	17
7.2 Campi di configurazioni notevoli	17
7.3 Forza tra fili paralleli	18
7.4 Legge di Ampère	18
7.5 Magnetizzazione, campi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$	18
7.6 Dia-, para- e ferromagnetismo	19

8	Campi variabili nel tempo, induzione e Maxwell	19
8.1	Legge di Faraday–Neumann–Lenz	19
8.2	Forza elettromotrice di movimento	20
8.3	Esempio: campo elettrico indotto da un solenoide	20
8.4	Autoinduzione e circuiti RL	21
8.5	Energia magnetica	21
8.6	Induzione mutua	21
8.7	Ampère–Maxwell e corrente di spostamento	22
8.8	Equazioni di Maxwell nel vuoto	22
9	Oscillazioni elettriche e correnti alternate	23
9.1	Circuito LC ideale	23
9.2	Circuito RLC libero	23
9.3	Corrente alternata sinusoidale	23
9.4	Impedenze	24
9.5	Risonanza	24
9.6	Potenza in corrente alternata	25
9.7	Trasformatore ideale	25
10	Onde elettromagnetiche	25
10.1	Onde piane	25
10.2	Equazione delle onde	25
10.3	Struttura trasversale dell'onda	25
10.4	Energia, vettore di Poynting e pressione di radiazione	26
10.5	Polarizzazione	26
10.6	Radiazione di dipolo oscillante e spettro	26
11	Approfondimenti operativi dai capitoli	27
11.1	Esperienza di Millikan e misura di e	27
11.2	Potenziali di distribuzioni standard	27
11.3	Salto dei campi alle superfici	27
11.4	Conduttori con cavità e schermo elettrostatico	28
11.5	Forza tra le armature di un condensatore	28
11.6	Dielettrico inserito parzialmente	28
11.7	Reti elettriche: metodo sistematico	28
11.8	Ponte di Wheatstone e potenziometro	29
11.9	Campo magnetico dentro un conduttore cilindrico	29
11.10	Toroide ideale	29
11.11	Regole di verso in induzione	30
11.12	Teorema di Poynting	30
11.13	Fasi nei circuiti sinusoidali	30
11.14	Intensità, ampiezze e valori efficaci di un'onda	31
12	Formulario essenziale	31

Premessa e convenzioni

Questi appunti condensano il percorso del PDF di riferimento sull'elettromagnetismo e sulle onde, integrando i passaggi messi in evidenza nelle trascrizioni delle lezioni 21–32. Non sono una riscrittura del testo: l'obiettivo è avere una traccia utilizzabile per studio, ripasso ed esercizi, con definizioni operative, formule centrali, procedure di calcolo e note di metodo.

Useremo il Sistema Internazionale. Il versore normale a una superficie è indicato con $\mathbf{n}$; $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$; $d\boldsymbol{\ell}$ è l'elemento orientato di linea. Le costanti fondamentali sono

$$\varepsilon_0 = 8.854\,187\,8128 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

La costante di Coulomb è

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2.$$

Nota Uso delle trascrizioni

Le trascrizioni sono rumorose: le ho usate come guida per evidenziare i punti su cui il docente ha insistito, in particolare principio di sovrapposizione, integrazione di distribuzioni continue, espansioni asintotiche, potenziale di distribuzioni sferiche, capacità, circuiti RC, segni nelle leggi di Kirchhoff, legge di Ampère, induzione, forma integrale e differenziale di Maxwell, deduzione delle onde piane e meccanismo qualitativo di diamagnetismo.

1 Carica elettrica, forza elettrostatica e campo elettrostatico

1.1 Carica elettrica, isolanti e conduttori

La carica elettrica è la proprietà fisica che determina l'interazione elettromagnetica. Esistono due segni di carica: positiva e negativa. Cariche dello stesso segno si respingono, cariche di segno opposto si attraggono.

Definizione Quantizzazione della carica

La carica elettrica di un corpo isolato è un multiplo intero della carica elementare:

$$q = ne, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

L'elettrone ha carica $-e$, il protone $+e$, il neutrone carica nulla.

Teorema Conservazione della carica

In un sistema elettricamente isolato la somma algebrica delle cariche rimane costante:

$$Q_{\text{tot}} = \sum_i q_i = \text{costante}.$$

La carica può essere trasferita o separata, ma non creata o distrutta nei processi elettromagnetici ordinari.

Gli isolanti trattengono localmente la carica; nei conduttori una parte delle cariche è libera di muoversi. Nei metalli i portatori mobili sono elettroni di conduzione. La carica per strofinio separa cariche tra due corpi; la carica per contatto trasferisce carica tra corpi; la carica per induzione ridistribuisce le cariche mobili senza contatto diretto con il corpo inducente.

Nota Induzione elettrostatica

Se una bacchetta positiva viene avvicinata a un conduttore neutro, gli elettroni liberi sono attratti verso la bacchetta e la parte lontana rimane con eccesso positivo. Il conduttore resta globalmente neutro, ma polarizzato. Se si collega a terra la parte lontana e poi si isola il conduttore, resta una carica netta di segno opposto a quella inducente.

1.2 Legge di Coulomb e sovrapposizione**Teorema Legge di Coulomb**

Due cariche puntiformi q_1 e q_2 , ferme nel vuoto e separate da distanza r , interagiscono con una forza centrale

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{u}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

dove $\mathbf{F}_{12}$ è la forza esercitata da q_2 su q_1 e $\mathbf{u}_{12}$ è il versore diretto da q_2 a q_1 . Il segno del prodotto $q_1 q_2$ determina attrazione o repulsione.

Proposizione Principio di sovrapposizione

Se una carica q è soggetta all'azione di più cariche q_i , la forza totale è la somma vettoriale delle forze dovute a ciascuna carica presa separatamente:

$$\mathbf{F} = q \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

Il principio è valido perché le equazioni dell'elettromagnetismo classico sono lineari nelle sorgenti e nei campi.

Nota Metodo negli esercizi con più cariche

Non sommare i moduli se le forze non sono collineari. Si disegna ogni contributo, si sceglie un sistema di assi, si calcolano le componenti e solo alla fine si ricomponi il vettore risultante. Questo è uno dei punti ricorrenti nelle lezioni iniziali.

1.3 Campo elettrico**Definizione Campo elettrostatico**

Il campo elettrico in un punto è la forza per unità di carica positiva di prova:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_0}.$$

Per una carica puntiforme q posta nell'origine:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r.$$

La forza su una carica q_0 immersa nel campo è $\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$.

Per più cariche puntiformi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3}.$$

1.4 Distribuzioni continue di carica

Quando il numero di cariche elementari è enorme, si introduce una densità continua:

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \quad [\text{C/m}], \quad \sigma = \frac{dq}{dS} \quad [\text{C/m}^2], \quad \rho = \frac{dq}{dV} \quad [\text{C/m}^3].$$

La somma discreta diventa un integrale:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dq'$$

con $dq' = \lambda d\ell', \sigma dS'$ oppure $\rho dV'$.

Esercizio Campo sull'asse di un anello uniformemente carico

Anello di raggio a , carica totale Q , punto sull'asse a distanza x dal centro. Per simmetria le componenti trasversali si cancellano:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x.$$

Per $x \gg a$:

$$E_x \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \left(1 - \frac{3a^2}{2x^2} + \dots \right),$$

quindi a grande distanza l'anello si comporta come una carica puntiforme.

Esercizio Campo sull'asse di un disco uniformemente carico

Disco di raggio a , densità superficiale σ , punto sull'asse a distanza $x > 0$. Si sommano anelli concentrici $dq = \sigma 2\pi r dr$:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right).$$

Per $x \gg a$:

$$E_x \simeq \frac{\sigma a^2}{4\epsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}, \quad Q = \pi a^2 \sigma.$$

Per un piano infinito, ottenuto come limite $a \rightarrow \infty$ a x fissato:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Nota Espansioni asintotiche

Nelle lezioni è stato sottolineato che bisogna riconoscere la variabile piccola. Per il disco lontano, la quantità piccola è a/x , non x . Si usa

$$(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} u^2 + \dots, \quad |u| \ll 1.$$

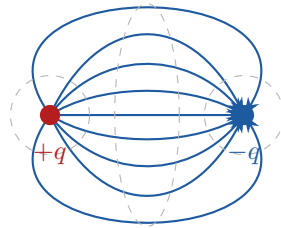
Ad esempio

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (a/x)^2}} \simeq 1 - \frac{a^2}{2x^2} + \dots$$

1.5 Linee di campo e moto di una carica

Le linee di campo sono curve orientate tangenti a $\mathbf{E}$ in ogni punto. La densità locale delle linee rappresenta qualitativamente il modulo del campo. In elettrostatica partono dalle cariche positive e terminano sulle negative o all'infinito; non si intersecano, perché il campo in un punto ha direzione univoca.

linee di campo: da + a -



curve tratteggiate: equipotenziali schematiche

Figura 1: Dipolo elettrico: le linee di campo sono tangenti a $\mathbf{E}$, mentre le superfici equipotenziali sono perpendicolari al campo. Il disegno è qualitativo, non in scala.

Una carica q in un campo uniforme $\mathbf{E}$ subisce accelerazione costante

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m}.$$

Se entra con velocità iniziale perpendicolare al campo, il moto è analogo al moto parabolico in gravità, con accelerazione lungo la direzione del campo. Se il campo accelera la carica lungo una differenza di potenziale ΔV , l'energia cinetica varia di

$$\Delta K = q(V_i - V_f) = -q\Delta V.$$

2 Lavoro elettrico, potenziale ed energia elettrostatica

2.1 Lavoro della forza elettrica

La forza di Coulomb è centrale e conservativa. Per una carica di prova q_0 che si sposta da A a B in un campo elettrostatico:

$$L_{A \rightarrow B} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

Il lavoro dipende solo dagli estremi, non dal cammino.

Definizione Differenza di potenziale

La differenza di potenziale tra A e B è

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

Equivalentemente,

$$L_{A \rightarrow B} = q_0 [V(A) - V(B)].$$

L'unità di misura è il volt: $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

Se si sceglie $V(\infty) = 0$, il potenziale di una carica puntiforme è

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Per più cariche:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|}.$$

Per una distribuzione continua:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}.$$

2.2 Energia potenziale elettrostatica

L'energia potenziale di una carica q in un potenziale V generato da altre cariche è

$$U = qV.$$

Per due cariche puntiformi:

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

Per un sistema di N cariche puntiformi:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Il fattore $1/2$ evita di contare due volte le coppie.

2.3 Campo come gradiente del potenziale

Teorema Relazione locale tra campo e potenziale

In elettrostatica

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

In coordinate cartesiane:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Le superfici $V = \text{costante}$ sono superfici equipotenziali. Il campo elettrico è sempre perpendicolare alle superfici equipotenziali, diretto nel verso di massima diminuzione del potenziale.

Teorema Rotore nullo in elettrostatica

Per un campo elettrostatico:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Queste sono formulazioni equivalenti della conservatività del campo elettrostatico.

2.4 Dipolo elettrico

Un dipolo elettrico è formato da due cariche $+q$ e $-q$ separate da un vettore $\mathbf{d}$ diretto da $-q$ a $+q$.

Definizione Momento di dipolo elettrico

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}.$$

A grande distanza, il potenziale di un dipolo è

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

In un campo uniforme:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

In un campo non uniforme compare anche una forza risultante:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

per dipolo rigido e momento costante.

Nota Segno dell'energia del dipolo

La configurazione stabile ha $\mathbf{p}$ parallelo a $\mathbf{E}$, perché $U = -pE \cos \theta$ è minima per $\theta = 0$.

3 Legge di Gauss

3.1 Flusso del campo elettrico

Definizione Flusso

Il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso una superficie orientata S è

$$\Phi_E(S) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Per una superficie chiusa si usa la normale uscente e si scrive $\iint_{\Sigma}$.

Teorema Legge di Gauss

Il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa è uguale alla carica totale interna divisa per ϵ_0 :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

In forma locale:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Nota Quando Gauss calcola direttamente il campo

La legge di Gauss è sempre vera, ma permette di ricavare E in modo immediato solo quando la simmetria consente di portare E fuori dall'integrale: simmetria sferica, cilindrica, piana. Altrimenti rimane una legge globale, non una scorciatoia di calcolo.

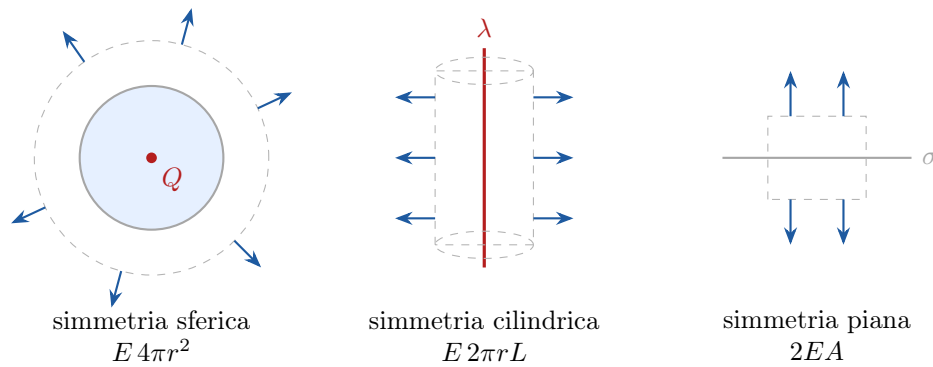


Figura 2: Superfici gaussiane naturali: sfera, cilindro e pillbox. In questi tre casi la simmetria rende il modulo del campo costante sulla parte utile della superficie.

3.2 Applicazioni principali

Proposizione Distribuzione sferica

Per una distribuzione sfericamente simmetrica, il campo è radiale. Se $Q(r)$ è la carica contenuta entro il raggio r :

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}, \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}.$$

Per una sfera isolante uniformemente carica di raggio R e carica totale Q :

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

Proposizione Filo infinito

Per un filo infinito con densità lineare λ , scegliendo come superficie gaussiana un cilindro coassiale di raggio r e lunghezza L :

$$E(2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}, \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Proposizione Piano infinito

Per un piano infinito uniformemente carico con densità σ :

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Per due piani paralleli con densità $+\sigma$ e $-\sigma$, campo ideale tra le armature:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

mentre all'esterno i campi si cancellano.

3.3 Potenziale di una sfera uniformemente carica

Per $V(\infty) = 0$ e sfera isolante uniforme:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, & r \geq R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & 0 \leq r \leq R. \end{cases}$$

Il potenziale è continuo in $r = R$; il campo, pari a $-dV/dr$, è anch'esso continuo per una distribuzione volumica non singolare.

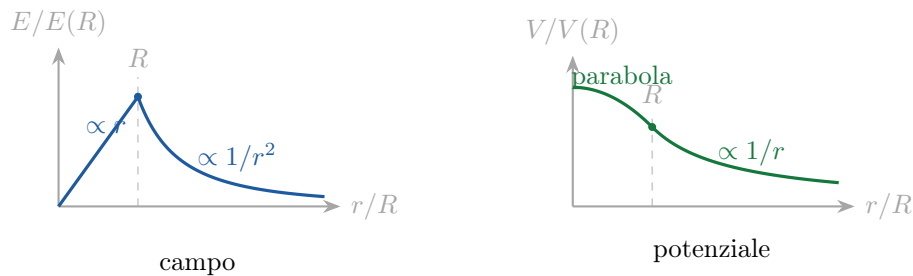


Figura 3: Sfera isolante uniformemente carica: $E(r)$ e $V(r)$ sono continui in $r = R$, ma cambiano legge passando dalla regione interna a quella esterna.

Nota Integrare a tratti

Se si calcola una differenza di potenziale tra un punto interno e uno esterno alla sfera, l'integrale va spezzato nei tratti in cui cambia l'espressione del campo:

$$V(B) - V(A) = - \int_A^R \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\ell - \int_R^B \mathbf{E}_{\text{est}} \cdot d\ell.$$

Questo è stato esplicitato nelle lezioni perché è un errore frequente usare la formula esterna anche dentro la sfera.

4 Conduttori, condensatori, dielettrici ed energia elettrostatica

4.1 Conduttori in equilibrio elettrostatico

In equilibrio elettrostatico le cariche libere di un conduttore non devono muoversi. Ne seguono proprietà fondamentali.

Teorema Proprietà dei conduttori in equilibrio

Per un conduttore in equilibrio elettrostatico:

1. il campo elettrico all'interno del materiale conduttore è nullo: $\mathbf{E} = \mathbf{0}$;
2. il potenziale è costante in tutto il conduttore;
3. eventuale carica netta in eccesso risiede sulla superficie;
4. il campo immediatamente esterno è normale alla superficie;
5. nel vuoto, appena fuori dalla superficie, $E_n = \sigma/\epsilon_0$.

Dimostrazione

Se $\mathbf{E}$ fosse non nullo dentro il conduttore, le cariche libere subirebbero una forza e si muoverebbero, contraddicendo l'equilibrio. Poiché $\mathbf{E} = -\nabla V$, gradiente nullo implica potenziale costante. Applicando Gauss a una superficie appena interna al conduttore si trova carica interna nulla; l'eccesso resta sulla superficie. La componente tangenziale esterna deve essere nulla, altrimenti cariche superficiali scorrerebbero lungo la superficie. Il salto della componente normale segue da un pillbox gaussiano. $\square$

Nota Effetto punta

In un conduttore non sferico la densità superficiale di carica è maggiore dove il raggio di curvatura è minore. Per questo il campo vicino a punte e bordi è più intenso e può innescare scariche.

4.2 Capacità di un conduttore isolato

Un conduttore isolato con carica Q si porta a un potenziale V rispetto all'infinito. La capacità è

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Per una sfera conduttrice isolata di raggio R :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, \quad C = 4\pi\epsilon_0 R.$$

4.3 Condensatori

Un condensatore è formato da due conduttori in induzione elettrostatica completa: le linee di campo che partono da un'armatura terminano sull'altra. Le armature hanno cariche $+Q$ e $-Q$.

Definizione Capacità di un condensatore

$$C = \frac{Q}{\Delta V},$$

dove Q è il modulo della carica su ciascuna armatura e ΔV è la differenza di potenziale tra le armature.

Proposizione Condensatore piano ideale

Per armature parallele di area A , distanza d , vuoto tra le armature e campo uniforme:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}, \quad \Delta V = Ed,$$

quindi

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Altre geometrie importanti:

$$C_{\text{sferico}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}, \quad C_{\text{cilindrico}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)},$$

dove a e b sono i raggi delle armature interna ed esterna.

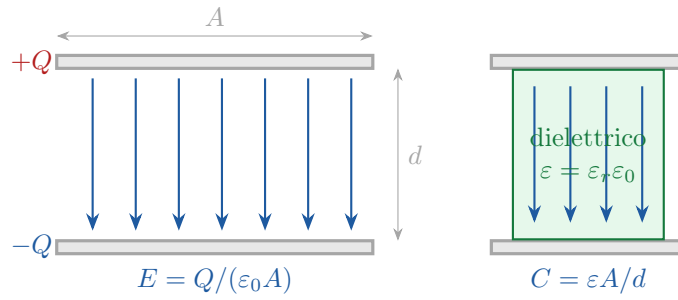


Figura 4: Condensatore piano ideale: il campo è quasi uniforme tra armature estese; un dielettrico lineare aumenta la capacità a parità di geometria.

Proposizione Collegamenti

Per condensatori in parallelo:

$$C_{\text{eq}} = \sum_i C_i,$$

perché hanno la stessa ΔV e le cariche si sommano. Per condensatori in serie:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{C_i},$$

perché hanno la stessa carica e le differenze di potenziale si sommano.

4.4 Energia del campo elettrico

L'energia immagazzinata in un condensatore è

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{Q^2}{2C}.$$

Per un condensatore piano nel vuoto, l'energia può essere interpretata come energia distribuita nel campo:

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \quad U = \int u_E \, dV.$$

In un mezzo lineare isotropo:

$$u_E = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2}\epsilon E^2.$$

4.5 Dielettrici e polarizzazione

Un dielettrico è un isolante che si polarizza in presenza di campo elettrico. La polarizzazione è il momento di dipolo elettrico per unità di volume:

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}.$$

Le cariche legate equivalenti sono

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}.$$

Si introduce il campo spostamento elettrico

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

La legge di Gauss per $\mathbf{D}$ coinvolge solo le cariche libere:

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{libera}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libera}}.$$

Per dielettrico lineare, omogeneo e isotropo:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e.$$

Un dielettrico riempie completamente un condensatore piano ideale aumentando la capacità:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon_r C_0.$$

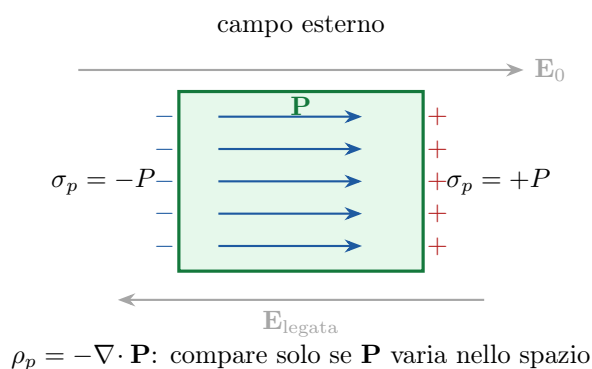


Figura 5: Polarizzazione uniforme di un dielettrico: le cariche legate si accumulano sulle superfici normali a $\mathbf{P}$ e riducono il campo interno rispetto al caso nel vuoto.

Nota Condensatore isolato o collegato

Se il condensatore è isolato, Q resta costante: inserendo un dielettrico diminuiscono E e ΔV , aumenta C . Se è collegato a un generatore, ΔV resta costante: aumenta Q e l'energia fornita dal generatore si ripartisce tra energia del campo e lavoro meccanico sul dielettrico.

5 Corrente elettrica e circuiti in corrente continua

5.1 Corrente e densità di corrente

Definizione Corrente elettrica

La corrente attraverso una superficie è la carica che la attraversa per unità di tempo:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

L'unità di misura è l'ampere: $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$.

Definizione Densità di corrente

La densità di corrente $\mathbf{J}$ è un vettore tale che

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Se i portatori hanno densità numerica n , carica q e velocità media di deriva $\mathbf{v}_d$, allora

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d.$$

Per elettroni, $q = -e$: il verso convenzionale della corrente è opposto alla velocità di deriva degli elettroni.

Teorema Equazione di continuità

La conservazione locale della carica si scrive

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

In regime stazionario $\partial \rho / \partial t = 0$, quindi $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

5.2 Legge di Ohm e modello microscopico

Per molti conduttori metallici a temperatura fissata vale la legge locale di Ohm:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

dove σ è la conducibilità. La resistività è $\rho_e = 1/\sigma$.

Per un filo omogeneo di lunghezza L e sezione A :

$$R = \rho_e \frac{L}{A}, \quad V = Ri.$$

La potenza dissipata per effetto Joule è

$$P = iV = Ri^2 = \frac{V^2}{R}.$$

Localmente:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}.$$

Nel modello classico di Drude, tra due urti successivi l'elettrone accelera per effetto del campo e acquisisce una velocità media di deriva

$$\mathbf{v}_d = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E}.$$

Ne segue

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

5.3 Resistori in serie e parallelo

Per resistori in serie:

$$R_{\text{eq}} = \sum_i R_i.$$

Per resistori in parallelo:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

In serie passa la stessa corrente; in parallelo la differenza di potenziale è la stessa.

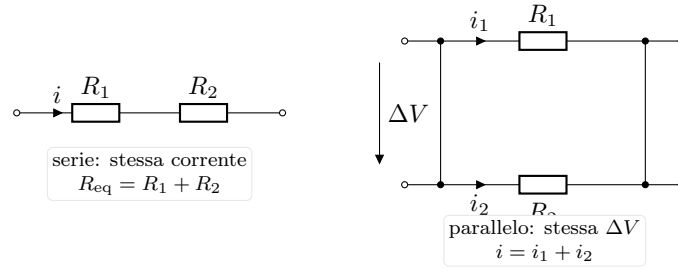


Figura 6: Reti elementari di resistori: il disegno esplicita quale grandezza resta comune, evitando di usare a memoria le formule equivalenti.

5.4 Forza elettromotrice e resistenza interna

Un generatore reale è caratterizzato da forza elettromotrice $\mathcal{E}$ e resistenza interna r . Se eroga corrente i a un carico esterno R :

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad V_{\text{morsetti}} = \mathcal{E} - ir.$$

La forza elettromotrice è il lavoro per unità di carica compiuto da forze non elettrostatiche:

$$\mathcal{E} = \oint \frac{\mathbf{F}_{\text{non elettrostatica}}}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

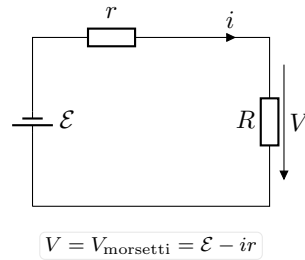


Figura 7: Modello di generatore reale: la resistenza interna r sottrae una caduta ir alla tensione disponibile ai morsetti del carico.

5.5 Circuiti RC

Per la carica di un condensatore C tramite resistenza R e generatore $\mathcal{E}$:

$$q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-t/RC}\right), \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}.$$

Per la scarica da carica iniziale Q_0 :

$$q(t) = Q_0 e^{-t/RC}, \quad i(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

se $i = dq/dt$ è definita positiva nel verso di aumento della carica sul condensatore. La costante di tempo è

$$\tau = RC.$$

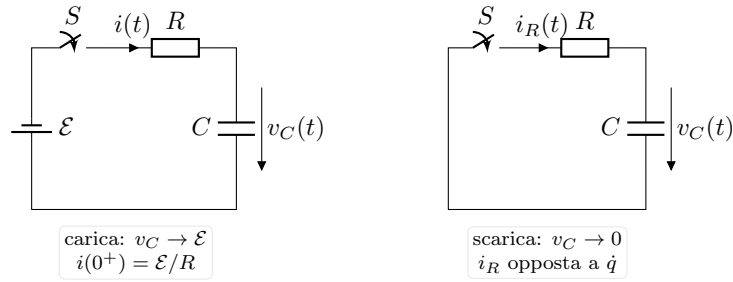


Figura 8: Circuiti RC di carica e scarica. La freccia scelta per la corrente del resistore nella scarica non coincide necessariamente con il verso positivo scelto per $\dot{q}$ sul condensatore.

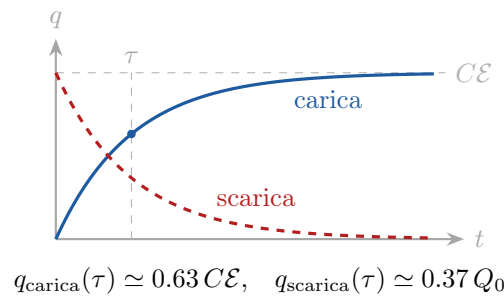


Figura 9: Andamento caratteristico di carica e scarica: dopo una costante di tempo la carica ha compiuto circa il 63% della variazione verso il valore finale.

Nota Segni nella scarica

Nelle lezioni è stato rimarcato che la corrente nella resistenza e la derivata della carica del condensatore possono avere segno opposto: durante la scarica le cariche attraversano la resistenza mentre la carica sulle armature diminuisce. Prima di scrivere $i = dq/dt$, bisogna fissare il verso positivo di i .

5.6 Corrente di spostamento

Nel condensatore in carica non passano cariche attraverso il dielettrico, ma il campo elettrico varia nel tempo. Maxwell introduce la corrente di spostamento

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Nel condensatore piano ideale:

$$\Phi_E = EA = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad i_s = \frac{dq}{dt} = i.$$

Questa uguaglianza garantisce continuità alla corrente totale lungo tutto il circuito.

5.7 Leggi di Kirchhoff

Teorema Legge dei nodi

In un nodo di una rete in regime stazionario:

$$\sum_k i_k = 0,$$

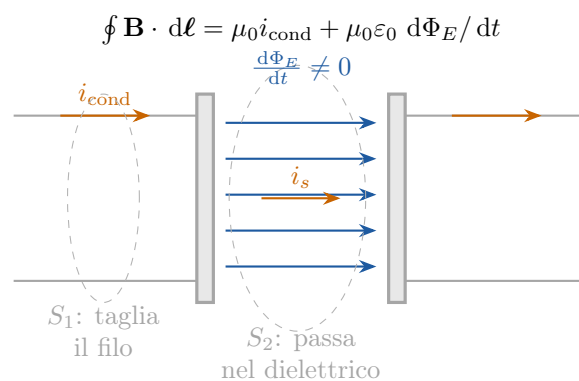


Figura 10: Nel condensatore in carica la superficie amperiana può essere deformata tra le armature: la corrente di spostamento rende indipendente il risultato dalla superficie scelta.

con segni scelti coerentemente. È la conservazione della carica.

Teorema Legge delle maglie

In una maglia chiusa:

$$\sum_k \mathcal{E}_k - \sum_j R_j i_j = 0.$$

È una forma della conservazione dell'energia per unità di carica.

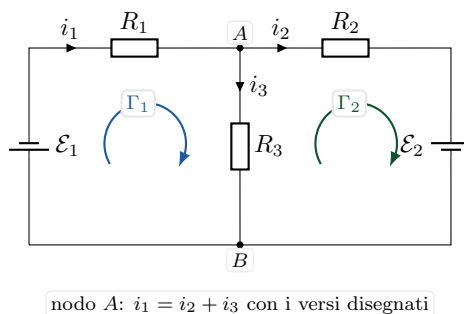


Figura 11: Esempio di rete per Kirchhoff: prima si fissano versi arbitrari di correnti e maglie, poi i segni delle equazioni seguono il disegno.

Nota Procedura per le maglie

Si sceglie un verso di percorrenza. Attraversando un generatore dal polo $-$ al polo $+$ si aggiunge $+\mathcal{E}$. Attraversando un resistore nel verso della corrente si ha una caduta $-Ri$; nel verso opposto $+Ri$. Se il risultato per una corrente è negativo, il verso reale è opposto a quello ipotizzato.

6 Campo magnetico e forza magnetica

6.1 Campo magnetico e forza di Lorentz

Il campo magnetico descrive l'azione magnetica su cariche in moto. La forza magnetica su una carica q con velocità $\mathbf{v}$ è

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

La forza elettromagnetica completa è la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

La forza magnetica è perpendicolare alla velocità, quindi non compie lavoro:

$$\mathbf{F}_B \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Può cambiare la direzione della velocità, non il modulo.

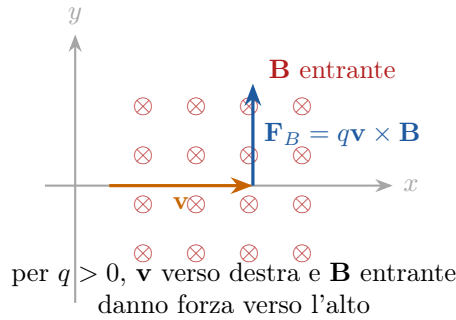


Figura 12: Regola della mano destra per la forza di Lorentz magnetica. Per cariche negative il verso della forza si inverte.

Nota Dipendenza dal sistema di riferimento

Le lezioni hanno sottolineato che campo elettrico e magnetico non sono entità completamente indipendenti: cambiano passando da un sistema inerziale a un altro. La forza complessiva e il moto osservato rimangono descrizioni coerenti dello stesso fenomeno fisico.

6.2 Forza su un conduttore percorso da corrente

Per un elemento di filo percorso da corrente i :

$$d\mathbf{F} = i d\mathbf{\ell} \times \mathbf{B}.$$

Per un tratto rettilineo di lunghezza vettoriale $\mathbf{L}$ in campo uniforme:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}.$$

6.3 Momento su una spira e momento magnetico

Una spira piana di area A , percorsa da corrente i , ha momento magnetico

$$\mathbf{m} = iA \mathbf{n},$$

dove $\mathbf{n}$ è orientato secondo la regola della mano destra rispetto alla corrente. In campo uniforme:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}.$$

6.4 Effetto Hall

Una corrente in un conduttore immerso in un campo magnetico produce una separazione trasversale di carica. In regime stazionario la forza elettrica di Hall bilancia la forza magnetica:

$$q\mathbf{E}_H + q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = 0.$$

Per geometria semplice, con corrente lungo x e campo lungo z :

$$E_H = v_d B, \quad V_H = E_H b.$$

Il segno della tensione di Hall rivela il segno dei portatori.

6.5 Moto di una particella in campo magnetico uniforme

Se $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, la forza magnetica fornisce accelerazione centripeta:

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r}, \quad r = \frac{mv}{|q|B}.$$

La pulsazione ciclotronica è

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}, \quad T = \frac{2\pi m}{|q|B}.$$

Se la velocità ha anche componente parallela a $\mathbf{B}$, il moto è elicoidale: la componente parallela resta costante e quella perpendicolare ruota.

Proposizione Selettore di velocità

Con campi uniformi incrociati $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, una particella passa senza deviazione se

$$q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \quad v = \frac{E}{B}$$

per la geometria corretta. Questo principio è usato negli spettrometri di massa.

7 Sorgenti del campo magnetico, legge di Ampère e materia magnetica

7.1 Legge di Biot–Savart / prima legge di Laplace

Per un elemento di circuito percorso da corrente i :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}.$$

Per una carica puntiforme in moto non relativistico:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2}.$$

7.2 Campi di configurazioni notevoli

Per filo rettilineo indefinito:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r},$$

con linee di campo circolari concentriche attorno al filo.

Per una spira circolare di raggio R , sull'asse a distanza x :

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Al centro:

$$B(0) = \frac{\mu_0 i}{2R}.$$

Per N spire, il risultato si moltiplica per N .

Per un solenoide lungo, con $n = N/L$ spire per unità di lunghezza:

$$B \simeq \mu_0 n i$$

all'interno, mentre all'esterno il campo ideale è trascurabile.

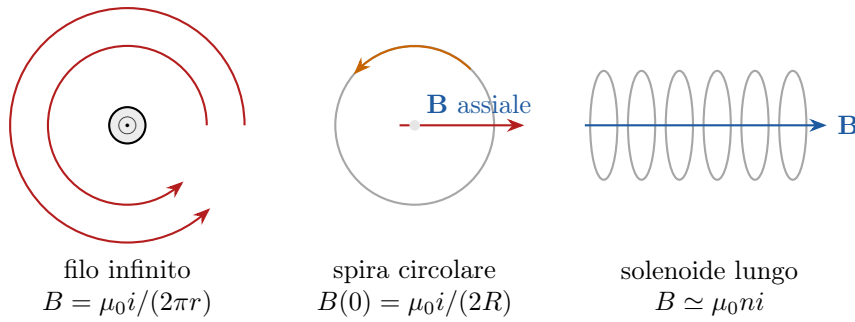


Figura 13: Tre campi magnetici standard. Le linee di $\mathbf{B}$ chiudono sempre su se stesse: il disegno mostra solo le regioni utili per il calcolo.

7.3 Forza tra fili paralleli

Due fili rettilinei indefiniti paralleli, distanti d , percorsi da correnti i_1 e i_2 :

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}.$$

Correnti concordi si attraggono; correnti discordi si respingono.

7.4 Legge di Ampère

Teorema Ampère magnetostatica

In magnetostatica:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 i_{\text{conc}},$$

dove i_{conc} è la corrente concatenata con la linea chiusa Γ . In forma locale:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Nota Circolazione del campo del filo

Per un filo infinito si sceglie come cammino una circonferenza di raggio r centrata sul filo. Poiché $\mathbf{B}$ è tangente e costante in modulo:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi r) = \mu_0 i,$$

da cui $B = \mu_0 i / (2\pi r)$. Questo è l'esempio base discusso nella lezione sulla legge di Ampère.

Il campo magnetico è solenoidale:

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Non esistono monopoli magnetici nella formulazione classica standard: le linee di $\mathbf{B}$ sono chiuse.

7.5 Magnetizzazione, campi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$

La magnetizzazione è il momento magnetico per unità di volume:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}.$$

Si introduce

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

La legge di Ampère per $\mathbf{H}$ coinvolge solo correnti libere:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = i_{\text{libera}}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{libera}}.$$

Per materiale lineare isotropo:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad \mu_r = 1 + \chi_m.$$

7.6 Dia-, para- e ferromagnetismo

- Diamagnetici: $\chi_m < 0$, il campo interno viene debolmente ridotto. L'effetto è presente in tutti i materiali, ma spesso è coperto dal paramagnetismo.
- Paramagnetici: $\chi_m > 0$ piccola, momenti magnetici atomici tendono ad allinearsi al campo ma l'agitazione termica li disordina.
- Ferromagnetici: risposta forte e non lineare, domini magnetici, isteresi, magnetizzazione residua.

Nota Modello orbitale del diamagnetismo

Nella lezione finale è stato richiamato il modello elementare di un elettrone in orbita. Una carica in rotazione equivale a una corrente e quindi a un momento magnetico. Per un elettrone:

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}.$$

La variazione indotta dal campo esterno si oppone alla causa che la produce, in accordo con la legge di Lenz; da qui il segno negativo della suscettività diamagnetica.

8 Campi variabili nel tempo, induzione e Maxwell

8.1 Legge di Faraday–Neumann–Lenz

Il flusso magnetico attraverso una superficie S è

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

La forza elettromotrice indotta lungo il bordo $\Gamma = \partial S$ è

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

In forma locale:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Il segno meno è la legge di Lenz: l'effetto indotto si oppone alla variazione di flusso che lo genera.

Nota Campo elettrico indotto

Quando $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$, il campo elettrico non è conservativo: la sua circolazione lungo una linea chiusa può essere non nulla. Le linee del campo elettrico indotto sono chiuse, non partono necessariamente da cariche.

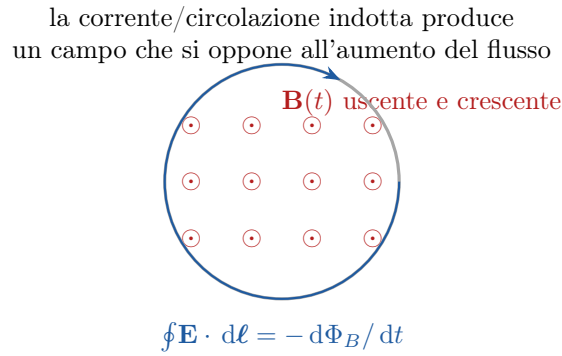


Figura 14: Lenz in forma grafica: se il flusso magnetico uscente aumenta, la circolazione indotta ha verso orario e genera un campo entrante.

8.2 Forza elettromotrice di movimento

Se un conduttore si muove con velocità $\mathbf{v}$ in un campo magnetico, le cariche subiscono $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La f.e.m. di movimento è

$$\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{\ell}.$$

Per una sbarretta di lunghezza L che scorre con velocità v perpendicolarmente a un campo uniforme B :

$$\mathcal{E} = BLv.$$

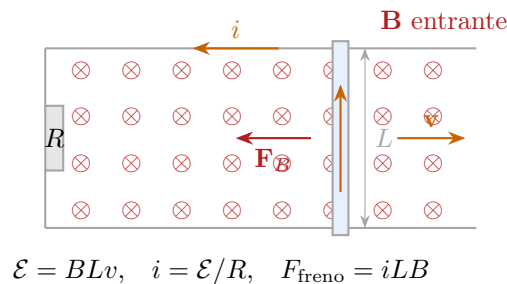


Figura 15: Sbarretta mobile su guide conduttrici: il moto aumenta il flusso magnetico concatenato e nasce una corrente il cui effetto magnetico si oppone al movimento.

8.3 Esempio: campo elettrico indotto da un solenoide

Solenoide lungo di raggio R con campo interno uniforme variabile $B(t)$. Per simmetria il campo elettrico indotto è azimutale. Su una circonferenza di raggio r :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\ell} = E_{\varphi} 2\pi r = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Se $r < R$:

$$\Phi_B = B\pi r^2, \quad E_{\varphi} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Se $r > R$:

$$\Phi_B = B\pi R^2, \quad E_{\varphi} = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}.$$

8.4 Autoinduzione e circuiti RL

Il flusso concatenato con un circuito è proporzionale alla corrente che lo percorre:

$$\Phi_B = Li,$$

dove L è l'induttanza. La f.e.m. autoindotta è

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}.$$

In un circuito RL alimentato da $\mathcal{E}$:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-tR/L}\right), \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Nello spegnimento:

$$i(t) = i_0 e^{-tR/L}.$$

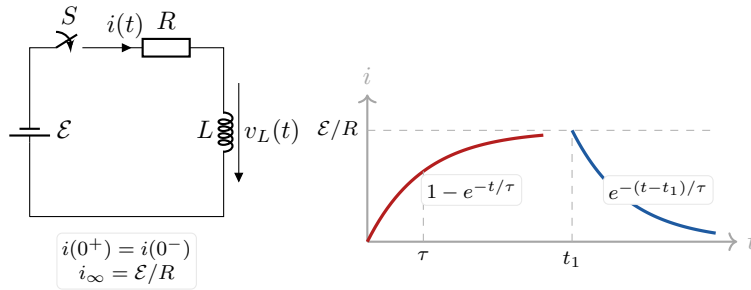


Figura 16: Risposta di un circuito RL: l'induttore impedisce salti istantanei della corrente e produce salita e spegnimento esponenziali con $\tau = L/R$.

8.5 Energia magnetica

L'energia immagazzinata in un induttore è

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2.$$

Nel campo magnetico:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu}$$

per un mezzo lineare. Nel vuoto:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

8.6 Induzione mutua

Se la corrente i_1 in un circuito genera flusso concatenato con un secondo circuito:

$$\Phi_{21} = Mi_1.$$

La f.e.m. indotta nel secondo è

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Per reciprocità, in condizioni ordinarie $M_{12} = M_{21} = M$.

Esercizio Filo rettilineo e spira rettangolare

Un filo infinito percorso da corrente i_1 genera

$$B(x) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x}.$$

Una spira rettangolare di lato parallelo al filo b , estesa radialmente da x_0 a x_0+a , intercetta il flusso

$$\Phi_{21} = \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} b \, dx = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{x_0+a}{x_0} \right) i_1.$$

Quindi

$$M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{x_0+a}{x_0} \right).$$

Questo è l'esempio richiamato nelle trascrizioni sull'induzione mutua.

8.7 Ampère–Maxwell e corrente di spostamento

La legge di Ampère magnetostatica è incompleta quando i campi variano nel tempo. La forma corretta è

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 i_{\text{cond,conc}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

In forma locale:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Il termine $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ è la densità di corrente di spostamento.

8.8 Equazioni di Maxwell nel vuoto

Nel vuoto, con cariche e correnti:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}, \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0},$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}, \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}.$$

In forma integrale:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \quad \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Nota Lettura fisica delle quattro equazioni

La prima dice che le cariche sono sorgenti del campo elettrico. La seconda dice che non ci sono sorgenti isolate del campo magnetico. La terza dice che un flusso magnetico variabile genera un campo elettrico vorticoso. La quarta dice che il campo magnetico è generato sia da correnti di conduzione sia da campi elettrici variabili.

9 Oscillazioni elettriche e correnti alternate

9.1 Circuito LC ideale

In un circuito LC ideale l'energia oscilla tra condensatore e induttore:

$$U = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}Li^2.$$

Poiché $i = dq/dt$ con segno opportuno, l'equazione è

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

La pulsazione naturale è

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \phi), \quad i(t) = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \phi).$$

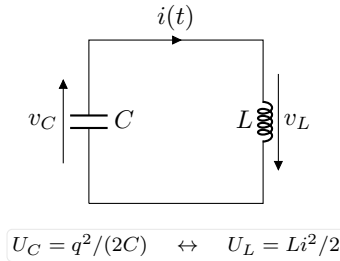


Figura 17: Oscillatore LC ideale: senza resistenza l'energia passa periodicamente dal condensatore all'induttore.

9.2 Circuito RLC libero

Con una resistenza in serie:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Definendo

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

si ha regime sottosmorzato se $\gamma < \omega_0$:

$$q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

9.3 Corrente alternata sinusoidale

Una grandezza alternata sinusoidale si scrive

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_v), \quad i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_i).$$

Il valore efficace è

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

9.4 Impedenze

Nel metodo fasoriale:

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}.$$

Per un RLC serie:

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right),$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad \tan \phi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

La corrente efficace è

$$I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{|Z|}.$$

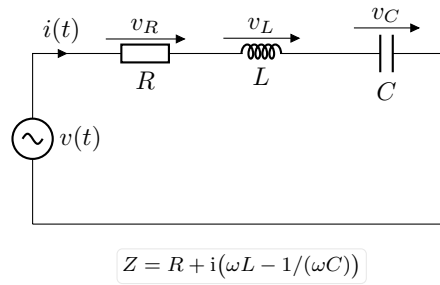


Figura 18: RLC serie in regime sinusoidale: la stessa corrente attraversa i tre bipoli, mentre le tensioni fasoriali si sommano.

9.5 Risonanza

La risonanza del circuito RLC serie avviene quando la reattanza totale è nulla:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Alla risonanza l'impedenza è minima, $Z = R$, e la corrente è massima. Le tensioni su induttore e condensatore possono essere molto più grandi della tensione del generatore, pur essendo opposte di fase.

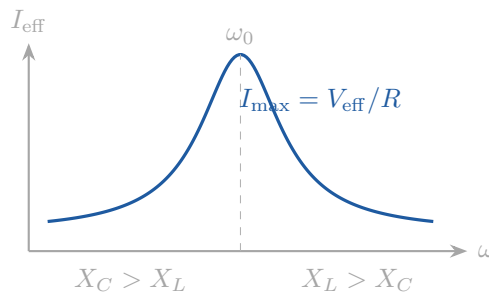


Figura 19: Curva di risonanza qualitativa per un RLC serie: la corrente è massima quando le reattanze induttiva e capacitiva si compensano.

9.6 Potenza in corrente alternata

La potenza istantanea è $p(t) = v(t)i(t)$. La potenza media è

$$\langle P \rangle = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi,$$

dove $\cos \phi$ è il fattore di potenza. Per un resistore puro $\phi = 0$; per induttore o condensatore ideali la potenza media è nulla.

9.7 Trasformatore ideale

Per due avvolgimenti con N_1 e N_2 spire accoppiati dallo stesso flusso magnetico:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}, \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

nel caso ideale senza perdite. Il trasformatore permette di trasportare potenza elettrica ad alta tensione e bassa corrente, riducendo le perdite Joule $P_{\text{persa}} = Ri^2$.

10 Onde elettromagnetiche

10.1 Onde piane

Un'onda piana che si propaga lungo x ha campi dipendenti da x e t tramite $kx - \omega t$:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t), \quad \mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}_0 \cos(kx - \omega t).$$

In assenza di cariche e correnti:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

10.2 Equazione delle onde

Applicando il rotore alla legge di Faraday e usando l'identità

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E},$$

in vuoto senza cariche si ottiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Analogamente:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

La velocità di propagazione è

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

10.3 Struttura trasversale dell'onda

Per un'onda che si propaga lungo $+x$, le equazioni di Maxwell implicano

$$E_x = 0, \quad B_x = 0.$$

I campi sono trasversali e tra loro perpendicolari. Se scegliamo

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_y,$$

allora

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z.$$

In generale:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{u}_k \times \mathbf{E}, \quad E = cB.$$

Il vettore $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ indica il verso di propagazione.

Nota Scelta degli assi nelle lezioni

Nella derivazione delle onde piane si fissa x come direzione di propagazione. Gli assi y e z possono essere scelti liberamente nel piano trasversale; si può orientarli in modo che il campo elettrico sia lungo uno solo dei due. Questa scelta non cambia la fisica, ma semplifica le componenti delle equazioni di Maxwell.

10.4 Energia, vettore di Poynting e pressione di radiazione

La densità di energia elettromagnetica nel vuoto è

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Per un'onda piana $E = cB$, i due contributi sono uguali:

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}.$$

Il vettore di Poynting è

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Il suo modulo rappresenta potenza per unità di area. Per un'onda sinusoidale:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2.$$

La pressione di radiazione su una superficie perfettamente assorbente è

$$p = \frac{\langle S \rangle}{c},$$

mentre su una superficie perfettamente riflettente è

$$p = \frac{2 \langle S \rangle}{c}.$$

10.5 Polarizzazione

La polarizzazione descrive la direzione di oscillazione del campo elettrico. Se $\mathbf{E}$ oscilla sempre lungo una direzione fissa, l'onda è polarizzata linearmente. Sovrapposizioni di due componenti trasversali sfasate possono produrre polarizzazione ellittica o circolare.

10.6 Radiazione di dipolo oscillante e spettro

Una carica accelerata emette radiazione elettromagnetica. Un dipolo elettrico oscillante è il modello base di emissione: il campo irradiato è massimo in direzioni perpendicolari all'asse del dipolo e nullo lungo l'asse. A grande distanza i campi irradiati decadono come $1/r$, quindi l'intensità decresce come $1/r^2$.

Lo spettro elettromagnetico comprende, in ordine di frequenza crescente: onde radio, microonde, infrarosso, visibile, ultravioletto, raggi X, raggi gamma. Per ogni onda:

$$c = \lambda f = \frac{\omega}{k}.$$

11 Approfondimenti operativi dai capitoli

11.1 Esperienza di Millikan e misura di e

L'esperienza di Millikan misura la carica elementare osservando goccioline d'olio cariche tra le armature di un condensatore. La goccia è soggetta a peso, spinta di Archimede, attrito viscoso e forza elettrica. In equilibrio elettrico:

$$qE \simeq mg$$

se si trascura la spinta dell'aria nella forma più semplice. In una trattazione più accurata si usa la velocità limite di caduta per ricavare il raggio della goccia tramite la legge di Stokes:

$$6\pi\eta r v_\ell = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_o - \rho_{\text{aria}})g.$$

Ripetendo la misura si trova che le cariche sono multipli interi di un valore minimo e .

11.2 Potenziali di distribuzioni standard

Il potenziale è spesso più facile da calcolare del campo, perché è scalare. Per un anello uniformemente carico:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Da $E_x = -dV/dx$ si ottiene il campo sull'asse:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Per un disco uniformemente carico, sommando anelli:

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + a^2} - |x| \right)$$

con scelta $V(\infty)$ non applicabile al disco infinito, ma ben definita per disco finito. Per $x > 0$:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right).$$

Nota Scelta del potenziale zero

Il potenziale è definito a meno di una costante. Per distribuzioni infinite, come filo o piano infinito, spesso non si può imporre $V(\infty) = 0$ perché l'integrale diverge; si fissano allora differenze di potenziale tra punti finiti.

11.3 Salti dei campi alle superfici

Le condizioni al contorno sono uno strumento rapido per non ripetere integrali locali.

Per il campo elettrico, una superficie con densità di carica libera σ_f dà:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma_f, \quad (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

se non vi sono campi magnetici variabili singolari sulla superficie. Nel vuoto, la componente normale di $\mathbf{E}$ salta di σ/ϵ_0 .

Per il campo magnetico:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f,$$

dove $\mathbf{K}_f$ è la densità di corrente libera superficiale. La componente normale di $\mathbf{B}$ è continua perché $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

11.4 Conduttori con cavità e schermo elettrostatico

Se in una cavità interna di un conduttore è posta una carica q , sulla superficie interna della cavità compare carica totale $-q$, mentre sulla superficie esterna compare una carica tale da conservare la carica totale del conduttore. Se la cavità è vuota e il conduttore è in equilibrio, il campo nella cavità è nullo: questo è il principio dello schermo elettrostatico. Una gabbia conduttrice chiusa isola il suo interno dai campi elettrostatici esterni, purché il conduttore possa raggiungere l'equilibrio.

11.5 Forza tra le armature di un condensatore

Per un condensatore piano isolato con carica Q fissata:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}.$$

La forza attrattiva tra le armature si ottiene da

$$F = -\frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A.$$

Il modulo è

$$|F| = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A.$$

Il fattore $1/2$ compare perché il campo che agisce su un'armatura è quello prodotto dall'altra, non il campo totale tra le armature.

11.6 Dielettrico inserito parzialmente

Un condensatore piano parzialmente riempito da un dielettrico può essere ridotto a condensatori equivalenti in serie o in parallelo a seconda della geometria. Se la lastra occupa una frazione laterale dell'area, le due regioni hanno la stessa ΔV e sono in parallelo:

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon \frac{A_1}{d} + \varepsilon_0 \frac{A_2}{d}.$$

Se la lastra occupa uno spessore lungo la direzione del campo, le regioni hanno la stessa carica libera e sono in serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon A} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 A}.$$

11.7 Reti elettriche: metodo sistematico

Per risolvere reti con più generatori e resistori:

1. scegliere correnti di ramo arbitrarie;
2. scrivere la legge dei nodi per nodi indipendenti;
3. scrivere la legge delle maglie per maglie indipendenti;
4. risolvere il sistema lineare;
5. interpretare segni negativi come inversione del verso reale.

Per strumenti ideali: l'amperometro ha resistenza nulla e si collega in serie; il voltmetro ha resistenza infinita e si collega in parallelo. Un amperometro reale si estende con una resistenza di shunt in parallelo; un voltmetro reale con una grande resistenza in serie.

11.8 Ponte di Wheatstone e potenziometro

Il ponte di Wheatstone misura una resistenza ignota imponendo corrente nulla nel galvanometro. Se il ponte è bilanciato:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x}.$$

Il potenziometro misura una f.e.m. confrontandola con una caduta di potenziale nota lungo un filo uniforme, in condizione di corrente nulla nel ramo di misura: così non si perturba la sorgente misurata.

11.9 Campo magnetico dentro un conduttore cilindrico

Per un filo cilindrico lungo di raggio R , con corrente uniforme i distribuita nella sezione, la densità di corrente è

$$J = \frac{i}{\pi R^2}.$$

Per $r < R$, la corrente concatenata è $i(r) = J\pi r^2 = ir^2/R^2$. Dalla legge di Ampère:

$$B(r)2\pi r = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2}, \quad B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r.$$

Per $r \geq R$:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Il campo cresce linearmente dentro il filo e decresce come $1/r$ fuori.

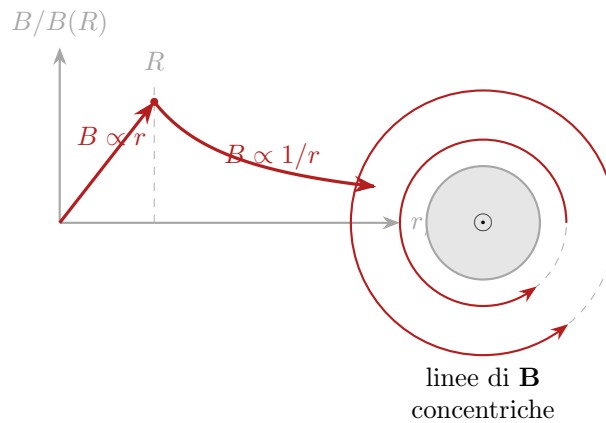


Figura 20: Filo cilindrico con corrente uniforme: dentro conta solo la corrente concatenata entro r , fuori si concatena tutta la corrente i .

11.10 Toroide ideale

Per un toroide con N spire percorse da corrente i , scegliendo una circonferenza amperiana di raggio r interna al nucleo:

$$B(r)2\pi r = \mu_0 N i, \quad B(r) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}.$$

Fuori dal toroide ideale la corrente concatenata netta è nulla e il campo è trascurabile. L'induttanza di un toroide a sezione A piccola rispetto al raggio medio R è approssimativamente

$$L \simeq \frac{\mu N^2 A}{2\pi R}.$$

11.11 Regole di verso in induzione

Per applicare Faraday–Lenz:

1. fissare un verso positivo di percorrenza della spira;
2. associare la normale positiva con la regola della mano destra;
3. calcolare il flusso Φ_B con segno;
4. usare $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$;
5. se $\mathcal{E} > 0$, la corrente indotta segue il verso scelto; se $\mathcal{E} < 0$, il verso è opposto.

La legge di Lenz è un controllo fisico: la corrente indotta genera un campo che si oppone alla variazione del flusso, non necessariamente al flusso stesso.

11.12 Teorema di Poynting

L'energia elettromagnetica obbedisce a una legge di conservazione locale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E},$$

dove

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Il termine $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ è la potenza per unità di volume trasferita dal campo alle cariche. Nei circuiti, l'energia non “viaggia nel filo” come materia: il flusso energetico è descritto dal campo elettromagnetico attorno ai conduttori.

11.13 Fasi nei circuiti sinusoidali

In un resistore tensione e corrente sono in fase:

$$v_R = Ri.$$

In un induttore la tensione anticipa la corrente di $\pi/2$:

$$v_L = L \frac{di}{dt}.$$

In un condensatore la corrente anticipa la tensione di $\pi/2$:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}.$$

Le reattanze sono

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

A bassa frequenza il condensatore tende a interrompere il circuito; ad alta frequenza l'induttore tende a opporsi alla corrente.

11.14 Intensità, ampiezze e valori efficaci di un'onda

Per un'onda elettromagnetica sinusoidale nel vuoto:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0},$$

$$I = \langle S \rangle = c \langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2.$$

Usando il valore efficace $E_{\text{eff}} = E_0/\sqrt{2}$:

$$I = \varepsilon_0 c E_{\text{eff}}^2.$$

Queste formule sono utili negli esercizi su radiazione solare, pressione di radiazione e potenza emessa.

12 Formulario essenziale

Argomento	Formula / risultato
Coulomb	$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{u}_{12}$
Campo da carica puntiforme	$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r$
Potenziale da carica puntiforme	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$
Campo-potenziale	$\mathbf{E} = -\nabla V$
Gauss	$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$
Divergenza elettrica	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$
Condensatore piano	$C = \varepsilon A/d$
Energia elettrica	$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$; nel vuoto $u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$
Ohm locale	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$
Resistenza	$R = \rho_e L/A$
Joule	$P = Ri^2 = V^2/R$
Continuità	$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
Lorentz	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
Forza su filo	$d\mathbf{F} = i d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$
Biot-Savart	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{u}_r}{r^2}$
Filo infinito	$B = \mu_0 i / (2\pi r)$
Ampère	$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 i_{\text{conc}}$
Gauss magnetica	$\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
Faraday-Lenz	$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -d\Phi_B / dt$
Ampère-Maxwell	$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 d\Phi_E / dt$
Induttore	$\mathcal{E}_L = -L di/dt$, $U_B = \frac{1}{2} Li^2$
Onde EM	$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$
Onda piana	$\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{u}_k$, $E = cB$
Poynting	$\mathbf{S} = (1/\mu_0) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$