

Appunti di Fisica Classica

Campo elettrico e magnetico nei mezzi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: polarizzazione · dielettrici · campo $\mathbf{D}$ · magnetizzazione · campo $\mathbf{H}$ · materiali magnetici · Maxwell nei mezzi

Indice

Premessa e fonti usate	1
1 Idea fisica: cosa cambia quando c'è un mezzo	1
2 Campo elettrico nei dielettrici	1
2.1 Dipolo elettrico e polarizzazione	1
2.2 Cariche legate	2
2.3 Campo spostamento elettrico $\mathbf{D}$	3
2.4 Dielettrico lineare, omogeneo, isotropo	3
2.5 Condensatore con dielettrico	4
2.6 Energia del campo elettrico nel mezzo	4
3 Campo magnetico nei materiali	4
3.1 Momento magnetico e magnetizzazione	4
3.2 Campo $\mathbf{H}$ e correnti libere	5
3.3 Materiale magnetico lineare	5
3.4 Dia-, para- e ferromagnetismo	6
4 Maxwell nei mezzi	6
5 Condizioni al contorno	7
6 Schema operativo per gli esercizi	7
7 Formulario essenziale	8

Premessa e fonti usate

Questi appunti sono una scheda autonoma sul comportamento dei campi elettrico e magnetico nella materia. Sono costruiti nello stesso stile degli appunti di Fisica in **Prototype Notes**: definizioni operative, formule centrali, note dalle lezioni e controlli dimensionali.

Nota Fonti locali

Riferimenti usati:

- Fisica/Corso completo/moduli/elettromagnetismo-onde.tex, sezioni su dielettrici, energia del campo, magnetizzazione, materiali magnetici e Maxwell;
- trascrizioni lezioni 24, 31 e 32 in Fisica/Corso completo/helper/Trascrizioni/, in particolare dipoli/polarizzazione, vettore di Poynting ed energia, dia-para-ferromagnetismo;
- appunti già presi in Fisica/Elettromagnetismo/Elettromagnetismo.tex per uniformare notazione e livello di dettaglio.

Le trascrizioni sono rumorose: le ho usate per capire enfasi e ordine concettuale, non per copiare frasi letterali.

1 Idea fisica: cosa cambia quando c'è un mezzo

Nel vuoto i campi sono descritti direttamente da cariche e correnti. In un materiale, invece, il campo applicato modifica la distribuzione microscopica di cariche e momenti magnetici. Il materiale diventa sorgente aggiuntiva di campo.

Definizione Campi microscopici e campi macroscopici

Il campo microscopico varia rapidamente su scala atomica. In fisica macroscopica si usa una media su un volume piccolo rispetto alla scala dell'esperimento ma grande rispetto alla scala atomica. I campi medi sono **E**, **B**, **D**, **H**.

Campo	Cosa misura	Perché serve
E	forza elettrica per unità di carica	è il campo che agisce sulle cariche
D	campo elettrico "ripulito" dalle cariche legate	Gauss conta solo cariche libere
B	campo magnetico fisico nella forza di Lorentz	entra in $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ e nei flussi magnetici
H	campo magnetico legato alle correnti libere	Ampère conta solo correnti libere

La regola mentale è:

$$\boxed{\text{materia elettrica} \Rightarrow \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{D}},$$

$$\boxed{\text{materia magnetica} \Rightarrow \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{H}}.$$

2 Campo elettrico nei dielettrici

2.1 Dipolo elettrico e polarizzazione

Un dielettrico è un isolante: le cariche non scorrono liberamente come in un metallo, ma possono spostarsi leggermente o orientarsi. Il modello elementare è il dipolo elettrico.

Definizione Momento di dipolo elettrico

Per due cariche $+q$ e $-q$ separate dal vettore δ , orientato da $-q$ a $+q$, il momento di dipolo è

$$\mathbf{p} = q\delta.$$

Unità: $[p] = \text{C m}$.

Nota Perché il dipolo è importante

Nelle trascrizioni viene sottolineato che anche un materiale globalmente neutro può produrre effetti elettrici se le cariche positive e negative non sono più sovrapposte. A grande distanza il potenziale di un dipolo decresce più rapidamente di quello di una carica singola, ma contiene l'informazione essenziale sull'orientamento della separazione di carica.

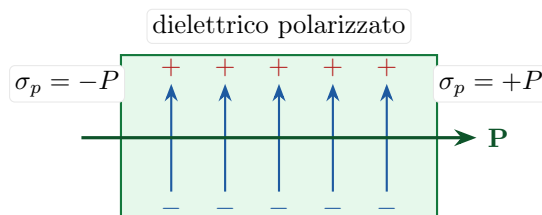
Definizione Polarizzazione

La polarizzazione è il momento di dipolo elettrico per unità di volume:

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}.$$

Unità:

$$[P] = \frac{\text{C m}}{\text{m}^3} = \text{C/m}^2.$$

**2.2 Cariche legate**

La polarizzazione produce cariche equivalenti, dette **legate**, perché non sono cariche libere depositate dall'esterno: derivano dallo spostamento microscopico delle cariche nel materiale.

Teorema Cariche legate da polarizzazione

Per un materiale polarizzato:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}.$$

σ_p è la densità superficiale di carica legata, ρ_p quella volumica.

Dimostrazione

Un elemento di volume polarizzato si comporta come un dipolo elementare $\mathbf{P} d\tau$. Riscrivendo il potenziale complessivo di una distribuzione di dipoli si ottengono un termine di superficie e uno di volume:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{r} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\tau \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{r} d\tau.$$

Il confronto con il potenziale generato da densità di carica mostra che le densità equivalenti sono proprio $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ e $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. $\square$

Nota Caso uniforme

Se $\mathbf{P}$ è uniforme dentro il materiale, allora $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$: non c'è carica legata nel volume. Rimangono solo cariche legate sulle superfici dove $\mathbf{P}$ ha componente normale.

2.3 Campo spostamento elettrico $\mathbf{D}$

La legge di Gauss per $\mathbf{E}$ vede tutte le cariche:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{libera}} + \rho_p}{\varepsilon_0}.$$

Usando $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{libera}}.$$

Questo motiva la definizione di $\mathbf{D}$.

Definizione Spostamento elettrico

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

La legge di Gauss nei dielettrici diventa

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{libera,int}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libera}}.$$

Nota Uso operativo

$\mathbf{D}$ non sostituisce $\mathbf{E}$ come campo fisico che fa forza sulle cariche. Serve perché semplifica i conti: quando conosci le cariche libere, trovi $\mathbf{D}$ con Gauss; poi, se conosci il materiale, ricavi $\mathbf{E}$.

2.4 Dielettrico lineare, omogeneo, isotropo

Nel caso più usato negli esercizi il materiale è lineare, omogeneo e isotropo. Significa:

- lineare: la risposta è proporzionale al campo;
- omogeneo: le costanti non cambiano da punto a punto;
- isotropo: non c'è una direzione privilegiata.

Proposizione Legame costitutivo elettrico

Per un dielettrico lineare isotropo:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e.$$

Qui χ_e è la suscettività elettrica, ε_r la costante dielettrica relativa.

Osservazione Controllo dimensionale

$[\mathbf{D}] = \text{C/m}^2$ perché il flusso di $\mathbf{D}$ dà una carica. Infatti $[\varepsilon_0 \mathbf{E}] = (\text{C}/(\text{V m}))(\text{V/m}) = \text{C/m}^2$, uguale a $[\mathbf{P}]$.

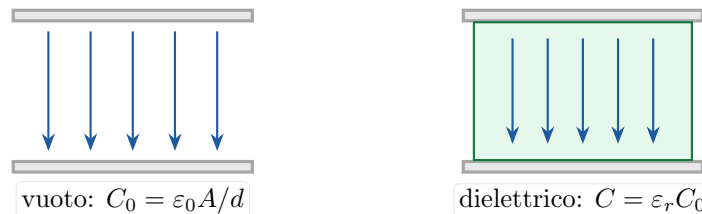
2.5 Condensatore con dielettrico

Per un condensatore piano ideale nel vuoto:

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}, \quad C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Se lo spazio è completamente riempito da un dielettrico lineare:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon_r C_0.$$



Nota Isolato o collegato

Se il condensatore è isolato, Q resta costante: inserendo il dielettrico diminuiscono E e ΔV , mentre C aumenta. Se è collegato a un generatore, ΔV resta costante: aumenta Q e il generatore fornisce energia.

2.6 Energia del campo elettrico nel mezzo

Nel vuoto:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

In un mezzo lineare:

$$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2.$$

Unità: $[u_E] = \text{J/m}^3$.

3 Campo magnetico nei materiali

3.1 Momento magnetico e magnetizzazione

Una spira percorsa da corrente è un dipolo magnetico. Per una spira piana:

$$\mathbf{m} = i A \mathbf{n}.$$

In un materiale ci sono molti momenti magnetici microscopici; la loro media definisce la magnetizzazione.

Definizione Magnetizzazione

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k \in \Delta V} \mathbf{m}_k.$$

Unità:

$$[M] = \frac{\text{A m}^2}{\text{m}^3} = \text{A/m}.$$

Nota Origine microscopica

La lezione finale insiste sulla distinzione: alcuni atomi/molecole hanno un momento magnetico proprio, altri no. Se i momenti propri si compensano, resta solo la risposta indotta: diamagnetismo. Se ci sono momenti propri che il campo tende ad allineare, si ha paramagnetismo. Nei ferromagneti entrano in gioco domini e interazioni interne.

3.2 Campo $\mathbf{H}$ e correnti libere

In magnetostatica nel vuoto:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Nei materiali la corrente totale si divide in correnti libere e correnti legate dovute alla magnetizzazione. Per separare le due parti si introduce $\mathbf{H}$.

Definizione Campo magnetico ausiliario

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

La legge di Ampère diventa

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = i_{\text{libera,conc}}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{libera}}.$$

Nota Uso operativo

Negli esercizi con simmetria si calcola prima $\mathbf{H}$ dalle correnti libere usando Ampère. Poi, se il materiale è lineare isotropo, si ricava $\mathbf{B}$ con $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Nel solenoide lungo con n spire per unità di lunghezza:

$$H \simeq ni, \quad B \simeq \mu ni = \mu_0 \mu_r ni.$$

3.3 Materiale magnetico lineare

Per materiali lineari isotropi non ferromagnetici:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad \mu_r = 1 + \chi_m.$$

χ_m è la suscettività magnetica, μ_r la permeabilità relativa.

Osservazione Controllo dimensionale

$[\mathbf{H}] = \text{A/m}$, come $[\mathbf{M}]$. Infatti $[B/\mu_0] = \text{T}/(\text{T m/A}) = \text{A/m}$.

3.4 Dia-, para- e ferromagnetismo

Materiale	Segno	Idea fisica
Diamagnetico	$\chi_m < 0, \mu_r < 1$	non ha momento proprio risultante; il campo induce momenti opposti al campo applicato; effetto debole.
Paramagnetico	$\chi_m > 0, \mu_r > 1$	ha momenti propri che tendono ad allinearsi al campo; l'agitazione termica si oppone; effetto debole.
Ferromagnetico	risposta non lineare	domini magnetici, magnetizzazione residua, isteresi; sopra la temperatura di Curie torna paramagnetico.

Nota Diamagnetismo minimo

Nel modello qualitativo visto a lezione, senza campo i momenti microscopici si compensano. Applicando $\mathbf{B}$, il moto elettronico viene modificato in modo che il momento indotto sia opposto al campo:

$$\Delta\boldsymbol{\mu} \parallel -\mathbf{B}, \quad \chi_m < 0.$$

Nota Paramagnetismo e temperatura

Un momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ in un campo ha energia

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos \theta.$$

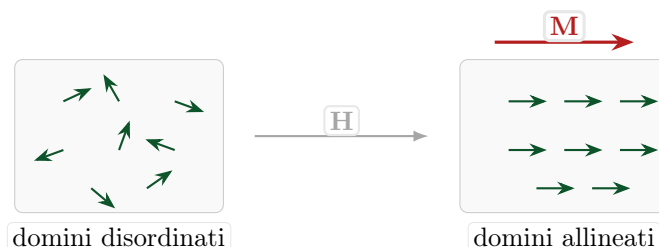
Per campi deboli la media termica dà

$$\langle \cos \theta \rangle \simeq \frac{\mu B}{3k_B T}, \quad M \simeq N \frac{\mu^2 B}{3k_B T}.$$

Quindi la suscettività paramagnetica diminuisce all'aumentare della temperatura: legge di Curie, $\chi_m \propto 1/T$.

Nota Ferromagneti: domini e isteresi

Nei ferromagneti esistono interazioni interne che favoriscono l'allineamento dei momenti in domini. Un campo esterno può far crescere i domini orientati favorevolmente; quando il campo viene rimosso può restare magnetizzazione residua. Il ciclo di isteresi nel piano B - H ha area pari al lavoro dissipato per unità di volume in un ciclo.



4 Maxwell nei mezzi

Nei mezzi è utile scrivere Maxwell separando cariche/correnti libere e risposta del materiale.

Teorema Equazioni macroscopiche nei mezzi

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libera}}}, \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0},$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}, \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{libera}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}.$$

In forma integrale:

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{libera,int}}, \quad \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = i_{\text{libera,conc}} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}.$$

Nota Corrente di spostamento nei mezzi

Nel vuoto il termine è $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$. Nei mezzi si scrive in modo compatto come $\partial \mathbf{D} / \partial t$, perché $\mathbf{D}$ include anche la variazione della polarizzazione. Questo mantiene la continuità della corrente totale quando, ad esempio, una superficie passa nel dielettrico di un condensatore.

5 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno sono spesso il punto più utile per gli esercizi con interfacce.

Proposizione Interfaccia tra due mezzi

Con normale $\mathbf{n}$ dal mezzo 1 al mezzo 2:

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_{\text{libera}}}, \quad \boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0},$$

$$\boxed{\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}} \quad \text{se } \partial \mathbf{B} / \partial t \text{ non produce f.e.m. singolare,}$$

$$\boxed{\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_{\text{libera}}},$$

con $\mathbf{K}_{\text{libera}}$ densità superficiale di corrente libera.

Nota Come ricordarle

Normale: usare le leggi di flusso. Tangenziale: usare le circuitazioni. $\mathbf{D}$ salta per carica libera superficiale; $\mathbf{B}$ non ha monopoli quindi la componente normale è continua; $\mathbf{E}$ tangenziale è continuo in elettrostatica; $\mathbf{H}$ tangenziale salta se c'è corrente libera superficiale.

6 Schema operativo per gli esercizi

1. **Identifica le sorgenti libere:** cariche libere per $\mathbf{D}$, correnti libere per $\mathbf{H}$.
2. **Sfrutta la simmetria:** piano, cilindro, sfera, solenoide. Se la simmetria è forte, usa Gauss/Ampère.
3. **Calcola il campo ausiliario:** $\mathbf{D}$ con Gauss oppure $\mathbf{H}$ con Ampère.

4. **Usa la legge costitutiva:** per mezzo lineare isotropo $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.
5. **Controlla le unità:** D in C/m^2 , H in A/m , E in V/m , B in tesla.
6. **Attenzione ai ferromagneti:** non usare automaticamente $B = \mu H$ se c'è isteresi o non linearità, salvo approssimazione dichiarata.

7 Formulario essenziale

Concetto	Formula
Polarizzazione	$\mathbf{P} = d\mathbf{p}/dV$
Cariche legate	$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$
Spostamento elettrico	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$
Gauss nei dielettrici	$\iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{libera}}$
Dielettrico lineare	$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$
Condensatore con dielettrico	$C = \varepsilon A/d = \varepsilon_r C_0$
Energia elettrica nel mezzo	$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$
Magnetizzazione	$\mathbf{M} = (1/\Delta V) \sum \mathbf{m}_k$
Campo ausiliario magnetico	$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$
Ampère nei materiali	$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = i_{\text{libera}}$
Materiale magnetico lineare	$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mu_r = 1 + \chi_m$
Energia magnetica lineare	$u_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{B^2}{2\mu}$
Maxwell-Ampère nei mezzi	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{libera}} + \partial \mathbf{D}/\partial t$

Osservazione Limiti di validità

Le formule $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ sono leggi costitutive, non leggi universali. Valgono in forma semplice solo per materiali lineari, omogenei e isotropi. Nei ferromagneti o in mezzi anisotropi bisogna usare la curva/materiale fornita dal problema.