

Appunti di Fisica Classica

Capitolo 2: Dinamica del Punto Materiale

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Principio di inerzia · Forza e massa inerziale · Secondo e Terzo principio della dinamica · Quantità di moto · Impulso · Forza peso · Forze elastiche · Attrito · Oscillatori armonici · Pendolo semplice · Momento angolare · Sistemi non inerziali

0 Indice

1 Legge di Inerzia. Terne di Riferimento Inerziali	1
1.1 Primo Principio della Dinamica (Principio di Inerzia)	1
1.2 Sistemi (terne) di riferimento inerziali	1
2 Forza	1
3 Concetto di Massa Inerziale	2
3.1 Proporzionalità tra forza e accelerazione	2
3.2 Operatività della massa	2
4 Secondo Principio della Dinamica	2
4.1 Equazioni del moto nelle componenti	3
4.2 Equilibrio	3
4.3 Dimensioni e unità della forza	3
5 Quantità di Moto e Impulso	3
5.1 Impulso	4
6 Terzo Principio della Dinamica. Azione e Reazione	4
7 Forza Peso	5
7.1 Legge di gravitazione universale	5
7.2 Forza peso	5
8 Forze Elastiche	7
9 Reazioni Vincolari	7
10 Attrito	8
10.1 Attrito statico	8
10.2 Attrito dinamico	9
11 Resistenze Passive	11
12 Processi Oscillatori	11
12.1 Oscillatore armonico libero	11
12.2 Oscillazioni smorzate	13
12.3 Oscillazioni forzate e risonanza	13
12.4 Oscillatore non lineare e frequenze armoniche	14
13 Pendolo Semplice	14
14 Massa Inerziale e Massa Gravitazionale	15
15 Momento di una Forza rispetto a un Punto e a un Asse	16
16 Momento della Quantità di Moto	17

17 Teorema del Momento della Quantità di Moto. Conservazione del Momento Angolare	17
18 Descrizione del Moto in Sistemi non Inerziali	18
19 Forze Apparenti: la Forza Centrifuga	19
20 Forze Apparenti: la Forza di Coriolis	19
21 Conclusioni sulla Dinamica del Punto	20
Riepilogo delle Formule Principali	22
Esercizi di Riepilogo	23

1 Legge di Inerzia. Terne di Riferimento Inerziali

1.1 Primo Principio della Dinamica (Principio di Inerzia)

Teorema – I Principio della Dinamica (Galilei–Newton)

Ogni corpo non sottoposto ad azioni esterne (punto materiale libero) persiste nel suo **stato di quiete** o di **moto rettilineo uniforme**. In altri termini, un punto materiale libero si muove con velocità vettoriale costante:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v} = \text{cost.}$$

1.2 Sistemi (terne) di riferimento inerziali

Definizione

Si dice **osservatore inerziale** un corpo libero non soggetto ad azioni esterne. La terna di riferimento solidale con esso si dice **sistema (terna) di riferimento inerziale**.

Osservazione

Tutti i sistemi inerziali sono in moto relativo di *traslazione uniforme* l'uno rispetto all'altro. Le coordinate $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ dello stesso punto in due sistemi in moto relativo con velocità costante $\mathbf{u}$ sono legate dalla **trasformazione galileiana**:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' + \mathbf{u} t$$

Osservazione

La Terra non è rigorosamente un sistema inerziale a causa della sua rotazione (accelerazione centripeta). Tuttavia, per la maggior parte degli scopi pratici, la Terra può essere considerata un sistema inerziale.

2 Forza

Definizione

Si chiamano **forze** le cause che possono alterare la velocità di un punto materiale in un sistema inerziale, cioè produrre un'accelerazione. La forza è una **grandezza vettoriale**.

Le proprietà fondamentali della forza, stabilite sperimentalmente:

- Due forze uguali applicate allo stesso corpo producono la stessa accelerazione (criterio di uguaglianza).
- Due forze uguali in intensità ma in direzioni diverse producono accelerazioni uguali in intensità.

- La **somma di più forze** obbedisce alla regola della somma vettoriale (principio di indipendenza delle azioni simultanee):

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = m \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = m \mathbf{a}$$

3 Concetto di Massa Inerziale

3.1 Proporzionalità tra forza e accelerazione

Per un dato corpo, forza e accelerazione sono legate da:

$$\mathbf{F} = k m \mathbf{a}$$

dove la costante k dipende dal sistema di unità (nel SI si pone $k = 1$) e m è la **massa inerziale** del corpo.

Definizione

La **massa inerziale** m è la grandezza scalare che quantifica la resistenza di un corpo alla variazione del suo stato di moto (inerzia). È una proprietà intrinseca del corpo, indipendente da posizione, velocità e accelerazione.

3.2 Operatività della massa

Due corpi hanno la stessa massa se, sottoposti alla stessa forza, acquistano la stessa accelerazione. Se due corpi di massa m_1 e m_2 vengono uniti, la massa del sistema composto è $m = m_1 + m_2$; in formule:

$$a = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

coerente con $F = m_1 a_1 = m_2 a_2 = (m_1 + m_2) a$.

4 Secondo Principio della Dinamica

Teorema – II Principio della Dinamica (Newton)

In un sistema di riferimento inerziale, l'accelerazione di un punto materiale è direttamente proporzionale alla forza risultante applicata e inversamente proporzionale alla sua massa:

$$\boxed{\mathbf{F} = m \mathbf{a}}$$

Nella formulazione originale di Newton, che include anche il caso di massa variabile:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

4.1 Equazioni del moto nelle componenti

Proiettando $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sui tre assi cartesiani:

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

Le componenti della forza sono in generale funzioni di posizione, velocità e tempo.

4.2 Equilibrio

Un punto materiale è in **equilibrio** se la risultante delle forze è nulla, $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$. Questo implica $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, cioè il punto è in quiete o in moto rettilineo uniforme.

Osservazione

Condizione necessaria e sufficiente perché un punto sia in *quiete*: che occupi una posizione di equilibrio ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) con velocità iniziale nulla.

4.3 Dimensioni e unità della forza

Con $k = 1$ nel SI:

$$[\mathbf{F}] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{N (newton)}$$

1 N è la forza che imprime a 1 kg un'accelerazione di 1 m/s².

5 Quantità di Moto e Impulso

Definizione

La **quantità di moto** (o momento lineare) di un punto materiale è il vettore:

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$$

con dimensioni $[\mathbf{p}] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Il II principio nella formulazione di Newton si scrive:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Teorema – Conservazione della Quantità di Moto

Se la forza totale applicata è nulla ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), la quantità di moto si conserva:

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} = \text{cost.}$$

Questa è anche la formulazione del **I principio** in termini di quantità di moto.

5.1 Impulso

Definizione

L'**impulso elementare** della forza nell'intervallo $[t, t + dt]$ è:

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$$

L'**impulso** della forza nell'intervallo $[t_1, t_2]$ è:

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

Esercizio 2.1 – Impulso verso l'alto

Un oggetto di massa m inizialmente fermo su un piano orizzontale riceve un impulso verticale verso l'alto e ritorna nella posizione iniziale dopo un tempo Δt . Determinare il valore dell'impulso.

Soluzione.

Sia v_0 la velocità iniziale subito dopo l'impulso. La legge oraria con asse y verso l'alto:

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

La condizione $y(\Delta t) = 0$ dà:

$$v_0 = \frac{1}{2} g \Delta t$$

Quindi l'impulso vale:

$$I = m v_0 = \frac{1}{2} m g \Delta t$$

6 Terzo Principio della Dinamica. Azione e Reazione

Teorema – III Principio della Dinamica (Newton)

Quando due punti materiali interagiscono, la forza $\mathbf{F}_{12}$ che il corpo 1 esercita sul corpo 2 e la forza $\mathbf{F}_{21}$ che il corpo 2 esercita sul corpo 1 sono:

- dirette lungo la retta congiungente i due punti,
- di uguale intensità e versi opposti:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Osservazione – Forze reali vs forze apparenti

Le forze reali (effettive) soddisfano il III principio: ad ogni forza su un corpo corrisponde una forza uguale e contraria su un altro corpo. Le **forze apparenti** (o fittizie), che compaiono nei sistemi non inerziali, *non* soddisfano il III principio.

7 Forza Peso

7.1 Legge di gravitazione universale

Teorema – Legge di Gravitazione Universale (Newton)

Due corpi puntiformi di massa m_1 e m_2 posti a distanza r si attraggono con una forza diretta lungo la loro congiungente:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

dove $G = 6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ è la **costante di gravitazione universale**.

Nota – Derivazione della legge dell'inverso del quadrato dalle Leggi di Keplero

Newton intuì la dipendenza $F \propto 1/r^2$ partendo dalla **terza legge di Keplero**:

$$T^2 \propto a^3$$

Per un'orbita circolare di raggio R (con $a = R$), la forza centripeta necessaria è:

$$F_c = m \omega^2 R = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R$$

Usando $T^2 \propto R^3$, si ottiene $T^2 = \alpha R^3$ per qualche costante α , da cui:

$$F_c = m \frac{4\pi^2}{\alpha R^3} R = m \frac{4\pi^2}{\alpha} \frac{1}{R^2}$$

La forza che mantiene il pianeta in orbita varia quindi come $1/R^2$. Newton comprese che questa stessa forza — che fa cadere la mela — agisce fino alla Luna e a tutti i corpi celesti (*hypotheses non fingo*).

7.2 Forza peso

La **forza peso** $\mathbf{P}$ che agisce su un corpo di massa m vicino alla superficie terrestre è la somma di:

- la forza di attrazione gravitazionale verso il centro della Terra,
- la forza centrifuga apparente dovuta alla rotazione terrestre.

Definizione

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g}$$

dove $\mathbf{g}$ è l'**accelerazione di gravità**, diretta verso il basso (verticale nel luogo considerato).

Nota – Derivazione di g dalla gravitazione universale

La forza gravitazionale terrestre è un caso particolare della Legge di Gravitazione Universale. Per un corpo di massa m ad altezza h dalla superficie terrestre:

$$F = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

Se $h \ll R_T$ (corpo vicino alla superficie), si approssima $(R_T + h) \approx R_T$:

$$F \approx G \frac{M_T m}{R_T^2} = m \underbrace{G \frac{M_T}{R_T^2}}_{=g}$$

L'accelerazione di gravità vale quindi:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2} \approx \frac{6,674 \times 10^{-11} \times 5,972 \times 10^{24}}{(6,371 \times 10^6)^2} \approx 9,81 \text{ m/s}^2$$

Questa approssimazione vale per $h \ll R_T \approx 6371 \text{ km}$. Per altezze confrontabili con il raggio terrestre (es. orbite satellitari) occorre usare la formula completa. In spazi limitati il campo può essere considerato **uniforme** (linee di forza parallele).

Osservazione

La **massa** è una proprietà intrinseca del corpo (invariante); il **peso** dipende dalla posizione rispetto alla Terra. Per questo motivo nel SI si sceglie la massa come grandezza fondamentale.

Esercizio 2.2 – Tensione nella fune di un ascensore

Un ascensore di massa m scende trattenuto da una fune inestensibile di massa trascurabile. Trovare la forza F da applicare all'estremo libero perché l'ascensore decelerì con accelerazione costante a .

Soluzione.

Scegliendo l'asse y verso l'alto, il II principio per l'ascensore dà:

$$-mg + T = ma \implies T = m(g + a)$$

Per la fune inestensibile di massa nulla $F = T$, quindi:

$$\boxed{F = m(g + a)}$$

La tensione è uguale in tutti i punti della fune inestensibile e priva di massa.

8 Forze Elastiche

Definizione

Le **forze elastiche** originano dalla deformazione dei corpi. Entro certi limiti (limite elastico), l'intensità della forza è proporzionale alla deformazione (**legge di Hooke**). Per una molla di costante elastica $k > 0$, con x allungamento rispetto alla posizione di riposo:

$$\mathbf{F} = -k x \hat{\mathbf{i}}$$

Nel caso più generale, detto $\mathbf{r}$ lo spostamento dalla posizione di riposo O :

$$\mathbf{F} = -k \mathbf{r}$$

Osservazione

La forza elastica è sempre diretta verso la posizione di riposo (*forza di richiamo*).

9 Reazioni Vincolari

Definizione

Le **reazioni vincolari** sono forze esercitate sui corpi dai vincoli (superfici, fili, guide) che limitano il loro movimento. Analiticamente, un vincolo si esprime imponendo alle coordinate condizioni del tipo:

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad f_2(x, y, z) = 0$$

Osservazione

La componente normale al vincolo della reazione vincolare può essere arbitrariamente grande; la componente tangenziale è nulla per vincoli lisci (senza attrito).

Esercizio 2.3 – Persona in ascensore

Una persona di massa m si trova in un ascensore con accelerazione a costante verso l'alto. Determinare la reazione vincolare R del pavimento sulla persona.

Soluzione.

Il II principio proiettato sull'asse y (verso l'alto):

$$-mg + R = ma \implies \boxed{R = m(a + g)}$$

La forza è maggiore del peso se $a > 0$ (verso l'alto) e minore se $a < 0$ (verso il basso).

Esercizio 2.4 – Piano inclinato liscio

Un corpo di massa m è posto su un piano inclinato liscio di angolo θ . Trovare l'accelerazione del corpo e la reazione normale.

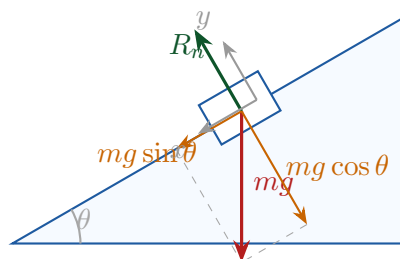
Soluzione.

Procedura: si disegnano tutte le forze (diagramma delle forze), si sceglie un sistema di riferimento conveniente e si proiettano le equazioni vettoriali.

Forze agenti:

- Forza peso: $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, verticale verso il basso.
- Reazione normale: $\mathbf{R}_n$, perpendicolare al piano.

Sistema di riferimento: si sceglie l'asse x parallelo al piano (verso il basso), l'asse y perpendicolare al piano. Questa scelta è conveniente perché il moto avviene solo lungo x (non c'è accelerazione lungo y).



La scelta di assi parallelo e perpendicolare al piano rende immediata la scomposizione del peso.

Equazione vettoriale: $\mathbf{P} + \mathbf{R}_n = m\mathbf{a}$.

Proiezione lungo x (parallelo al piano):

$$mg \sin \theta = m a_x \implies \boxed{a_x = g \sin \theta}$$

Il corpo scende con accelerazione uniformemente accelerata. Poiché $\sin \theta < 1$, si ha $a_x < g$: è questo il motivo per cui Galilei usava il piano inclinato per “diluire” la gravità e rendere il moto abbastanza lento da poter essere misurato con gli strumenti dell'epoca.

Proiezione lungo y (perpendicolare al piano, $a_y = 0$):

$$R_n - mg \cos \theta = 0 \implies \boxed{R_n = mg \cos \theta}$$

La reazione normale è minore del peso; la differenza dipende dall'angolo θ .

10 Attrito

10.1 Attrito statico

Quando si applica una forza tangenziale F a un corpo in quiete su una superficie, il vincolo esercita una forza d'attrito statico A che bilancia F fino a un valore massimo:

$$A_{\max} = \mu_s R_N$$

dove R_N è la reazione normale e μ_s è il **coefficiente di attrito statico** (adimensionale).

La reazione vincolare totale è sempre contenuta in un **cono di attrito** con semiangolo φ_s :

$$\tan \varphi_s = \mu_s$$

10.2 Attrito dinamico

Durante il moto, la forza d'attrito vale:

$$A_d = \mu_d R_N$$

con $\mu_d < \mu_s$ (**coefficiente di attrito dinamico**).

Nota – Spazio di arresto

Per un corpo che scorre su superficie orizzontale con velocità iniziale v_0 e poi frenato solo dall'attrito dinamico ($R_N = mg$), l'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} = -\mu_d mg \implies \ddot{x} = -\mu_d g$$

Dall'equazione $v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$ con $v = 0$:

$$L = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}$$

Lo spazio di frenata cresce con il quadrato della velocità: raddoppiare la velocità quadruplica lo spazio necessario per fermarsi.

Osservazione

Le leggi dell'attrito sono **empiriche** e rappresentano in modo semplice processi microscopici complessi (microsaldature, rugosità delle superfici). I coefficienti dipendono dalla natura e dallo stato delle superfici, ma generalmente *non* dall'area apparente di contatto.

Nota – Misura di μ_s e μ_d con il piano inclinato

Un metodo sperimentale elegante per misurare i due coefficienti usa un piano inclinato ad angolo variabile.

Misura di μ_s : si aumenta gradualmente l'angolo θ finché l'oggetto inizia a muoversi (*moto incipiente*, angolo θ_1). All'equilibrio lungo il piano:

$$F_s = mg \sin \theta, \quad R_N = mg \cos \theta$$

Al moto incipiente $F_s = \mu_s R_N$, da cui:

$$\mu_s (mg \cos \theta_1) = mg \sin \theta_1 \implies \boxed{\mu_s = \tan \theta_1}$$

Misura di μ_d : una volta in moto, si riduce l'angolo a $\theta_2 < \theta_1$ fino a che il corpo scorra a *velocità costante* (accelerazione nulla). Lo stesso calcolo con $F_d = \mu_d R_N$ dà:

$$\boxed{\mu_d = \tan \theta_2}$$

Poiché $\theta_1 > \theta_2$, si conferma $\mu_s > \mu_d$. Fisicamente, le asperità delle superfici sono inizialmente più incastrate e richiedono una forza maggiore per essere smosse.

Materiali a contatto	Stato	μ_s	μ_d
Legno su legno	secco	0,52	0,50–0,25
	saponato	0,30	0,20
Acciaio su legno	secco	0,62	0,60–0,50
	bagnato	0,25	—
Acciaio su metallo	secco	0,30	0,20–0,15
	lubrificato	—	0,03
Acciaio su ghiaccio	—	0,10	0,03
Vetro su vetro	secco	0,94	—
Nichel su nichel	secco	1,10	—

Esercizio 2.5 – Piano inclinato con fune

Un corpo di massa m è trattenuto da una fune su un piano inclinato di angolo α . Trovare: (1) la forza F nel caso liscio; (2) la forza minima F' nel caso scabro con μ_s ; (3) il massimo angolo $\alpha_{\max}$ senza forza applicata.

Soluzione.

1. Piano liscio: proiettando lungo il piano e perpendicolarmente:

$$F = mg \sin \alpha, \quad R_N = mg \cos \alpha$$

2. Piano scabro: la forza d'attrito (massima) aiuta la fune, quindi è sufficiente:

$$F' = mg \sin \alpha - \mu_s mg \cos \alpha = mg(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha)$$

3. Senza fune, l'equilibrio richiede $mg \sin \alpha \leq \mu_s mg \cos \alpha$:

$$\alpha_{\max} = \arctan \mu_s$$

Esercizio 2.6 – Macchina di Atwood con attrito

Una massa m_1 è trascinata da un contrappeso m_2 tramite una fune su una puleggia. Trovare accelerazione e tensione quando la superficie di m_1 è: (1) liscia orizzontale; (2) liscia inclinata di α ; (3) scabra orizzontale.

Soluzione.

Caso 1 — piano liscio orizzontale:

$$T = m_1 a, \quad m_2 g - T = m_2 a$$

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Caso 2 — piano liscio inclinato:

$$T - m_1 g \sin \alpha = m_1 a, \quad m_2 g - T = m_2 a$$

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g$$

Condizione $a \geq 0$: $m_2 \geq m_1 \sin \alpha$.

Caso 3 — piano scabro orizzontale: Condizione di moto: $m_2 \geq \mu_s m_1$. Durante il moto:

$$a = \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2} g$$

11 Resistenze Passive

Definizione

Le **resistenze passive** sono forze opposte alla velocità del corpo ($\mathbf{F} \parallel -\mathbf{v}$) che si presentano solo durante il moto.

Esercizio 2.7 – Imbarcazione che rallenta

Un'imbarcazione di massa m si muove a velocità v_0 quando il motore viene spento. La resistenza dell'acqua è $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$. Trovare: (1) come varia $v(t)$; (2) lo spazio massimo percorso; (3) v in funzione dello spazio.

Soluzione.

(1) Il II principio dà $-bv = m\dot{v}$, da cui:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

La velocità decade esponenzialmente; l'imbarcazione si ferma solo per $t \rightarrow \infty$.

(2) Lo spazio percorso:

$$x(t) = \frac{m}{b} v_0 \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_{\max} = \frac{m}{b} v_0$$

(3) Scrivendo $-b dx = m dv$ e integrando:

$$v(x) = v_0 - \frac{b}{m} x$$

La velocità decresce linearmente con lo spazio.

12 Processi Oscillatori

12.1 Oscillatore armonico libero

Un punto materiale di massa m collegato a una molla di costante k su piano orizzontale privo di attrito obbedisce a:

$$m\ddot{x} = -kx \implies \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Definizione

La **pulsazione propria** dell'oscillatore è:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Teorema – Soluzione dell'Oscillatore Libero

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

dove A è l'ampiezza e φ la fase iniziale, determinate dalle condizioni iniziali.

Nota – Forma equivalente con seno e coseno separati

La soluzione generale si scrive equivalentemente come combinazione lineare:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

dove $A_0 = x(0)$ è la posizione iniziale e $A_1 = \dot{x}(0)$ è la velocità iniziale. Le due forme sono legate da:

$$A_0 = A \cos \varphi, \quad \frac{A_1}{\omega_0} = -A \sin \varphi$$

da cui si ricavano ampiezza e fase:

$$A = \sqrt{A_0^2 + \left(\frac{A_1}{\omega_0}\right)^2}, \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{A_1/\omega_0}{A_0}\right)$$

Dimostrazione**Derivazione della soluzione via serie di Taylor.**

Si cerca la soluzione di $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ nella forma di serie di potenze:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

La derivata seconda è:

$$\ddot{x}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale e richiedendo che ogni coefficiente di t^k si annulli, si trova la **relazione ricorsiva**:

$$a_{n+2} = -\frac{\omega_0^2}{(n+2)(n+1)} a_n$$

con $a_0 = x(0)$ e $a_1 = \dot{x}(0)$. Le serie per i coefficienti pari e dispari coincidono con gli sviluppi in serie di coseno e seno:

$$x(t) = a_0 \underbrace{\left(1 - \frac{(\omega_0 t)^2}{2!} + \frac{(\omega_0 t)^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos(\omega_0 t)} + \frac{a_1}{\omega_0} \underbrace{\left(\omega_0 t - \frac{(\omega_0 t)^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin(\omega_0 t)}$$



12.2 Oscillazioni smorzate

Con resistenza passiva proporzionale alla velocità:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Teorema – Soluzione con Smorzamento Sottocritico ($b^2 < 4mk$)

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t + \varphi)$$

con pulsazione smorzata:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} < \omega_0$$

Il **decremento logaritmico** tra due massimi successivi è:

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{b}{2m} T$$

Osservazione – Casi particolari

- $b^2 > 4mk$: moto **sovrasmorzato** (aperiodico, ritorno lento).
- $b^2 = 4mk$: **smorzamento critico** ($x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}(A_1 + A_2 t)$): il punto raggiunge l'equilibrio nel minimo tempo senza oscillare (usato negli equipaggi di strumenti di misura).

12.3 Oscillazioni forzate e risonanza

Con forza esterna $F \cos \omega t$:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos \omega t$$

Teorema – Regime Stazionario

La soluzione di regime è:

$$x(t) = B F \cos(\omega t - \varphi)$$

con:

$$B = \frac{1}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Definizione

Il fenomeno della **risonanza meccanica** si verifica quando la frequenza della forzante ω si avvicina alla pulsazione propria ω_0 : l'ampiezza BF raggiunge un massimo tanto più elevato quanto minore è lo smorzamento b . Per $b \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \omega_0$ l'ampiezza diverge.

Osservazione

Fenomeni analoghi di risonanza si trovano in circuiti elettrici oscillanti, in sistemi atomici, in strutture meccaniche (ponti, edifici) ecc.

12.4 Oscillatore non lineare e frequenze armoniche

Se la forza di richiamo o di viscosità presenta termini non lineari (es. αx^2), la soluzione contiene armoniche superiori ($2\omega, 3\omega, \dots$). I termini prodotto tra componenti a frequenze diverse generano **armoniche di combinazione**.

Osservazione

Nei sistemi non lineari il comportamento dipende in modo critico dalle condizioni iniziali e non è predicibile dalla sola risposta a una forzante di data frequenza.

13 Pendolo Semplice**Definizione**

Il **pendolo semplice** è un punto materiale pesante di massa m sospeso a un punto fisso mediante un filo inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile, vincolato a muoversi in un piano verticale.

L'equazione del moto (ascissa curvilinea $s = l\vartheta$):

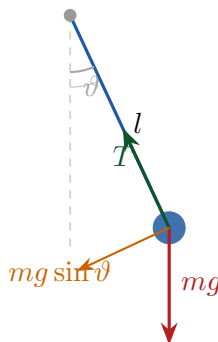
$$\ddot{s} = -g \sin \frac{s}{l}$$

Nota – Derivazione dell'equazione del moto

La forza di richiamo è la componente tangenziale della forza peso: $F_S = -mg \sin \theta$. Usando $s = L\theta$ e $\ddot{s} = L\ddot{\theta}$, la seconda legge di Newton lungo l'arco $mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$ dà:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Questa equazione *non lineare* non ha soluzione in forma chiusa mediante funzioni elementari; la sua soluzione esatta richiede le *funzioni ellittiche*.



La componente tangenziale del peso e la forza di richiamo che riporta il pendolo verso la verticale.

Per **piccole oscillazioni** ($\sin \vartheta \approx \vartheta$):

$$\ddot{s} = -\frac{g}{l}s \quad \Rightarrow \quad \text{moto armonico}$$

Teorema – Periodo del Pendolo Semplice (piccole oscillazioni)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Isocronismo: per piccole ampiezze, il periodo è *indipendente dall'ampiezza*.

Nota – Isocronismo e Galileo

La proprietà di isocronismo fu scoperta sperimentalmente da Galilei osservando l'oscillazione di una lampada nella cattedrale di Pisa. L'indipendenza del periodo dall'ampiezza rese il pendolo uno strumento ideale per la misura del tempo. Per angoli superiori a $\sim 10^\circ$ l'approssimazione non è più valida e il periodo inizia a dipendere dall'ampiezza.

Il pendolo permette anche di misurare g : noto l , si misura T e si ricava

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Osservazione – Correzione per grandi ampiezze

Per grandi ampiezze il periodo si corregge con:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\vartheta_{\max}}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\vartheta_{\max}}{2} + \dots \right)$$

Per $\vartheta_{\max} = 15^\circ$ la correzione è inferiore allo 0,5%.

La reazione del filo (proiezione sulla normale alla traiettoria):

$$R' - mg \cos \vartheta = m \frac{v^2}{l}$$

Il filo fornisce sia la forza che bilancia la componente normale del peso, sia la forza centripeta.

14 Massa Inerziale e Massa Gravitazionale

Nella fisica si distinguono due usi del termine “massa”:

- **Massa inerziale** m_i : compare nel II principio, $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$; misura la resistenza al moto.
- **Massa gravitazionale** m_g : compare nella legge di gravitazione, $F = Gm_{g1}m_{g2}/r^2$; misura l’“intensità” dell’interazione gravitazionale.

Teorema – Equivalenza delle Masse

Tutte le esperienze (dalla caduta libera al pendolo) mostrano che $m_i \propto m_g$ per qualsiasi corpo. Scegliendo opportunamente le unità, si pone:

$$m_i = m_g \equiv m$$

Questa equivalenza è una coincidenza nella meccanica classica, mentre nella **relatività generale** diventa un postulato fondamentale (*principio di equivalenza debole*).

Osservazione

Newton verificò l'equivalenza tramite il pendolo: se $m_i \neq m_g$, il periodo dipenderebbe dal tipo di materiale. Nessuna dipendenza è mai stata osservata con grande precisione.

Nota – Principio di equivalenza di Einstein

L'equivalenza $m_i = m_g$ è alla base del **Principio di Equivalenza** di Einstein. Poiché tutti i corpi — indipendentemente dalla massa — cadono con la stessa accelerazione g in un campo gravitazionale, gli effetti della gravità sono *localmente indistinguibili* dagli effetti di un sistema di riferimento accelerato. Un osservatore in caduta libera (es. astronauta in orbita) non avverte il proprio peso: non perché la gravità sia assente, ma perché si trova in **caduta libera costante** attorno al pianeta. Questo ragionamento portò Einstein a reinterpretare la gravità non come una forza bensì come curvatura dello spazio-tempo (relatività generale, 1915).

15 Momento di una Forza rispetto a un Punto e a un Asse

Definizione

Dato un polo O e una forza $\mathbf{F}$ applicata in P , il **momento della forza** rispetto a O è il vettore:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\mathbf{r} = \overrightarrow{OP})$$

con intensità $M = rF \sin \vartheta = Fb$ (b = braccio). Le componenti cartesiane:

$$M_x = yF_z - zF_y, \quad M_y = zF_x - xF_z, \quad M_z = xF_y - yF_x$$

Dimensioni: $[\mathbf{M}] = \text{N} \cdot \text{m}$.

Definizione

Il **momento assiale** (momento rispetto a una retta orientata $\mathbf{a}$) è la proiezione del momento rispetto a un punto di $\mathbf{a}$ lungo $\mathbf{a}$ stessa. È invariante al variare del punto di $\mathbf{a}$ e al variare del punto di applicazione di $\mathbf{F}$ lungo la sua retta d'azione.

16 Momento della Quantità di Moto

Definizione

Il **momento della quantità di moto** (o momento angolare) di un punto materiale P rispetto al polo O è il vettore:

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

con intensità $b = m v_n r$ (v_n = componente di $\mathbf{v}$ perpendicolare a $\mathbf{r}$). Dimensioni: $[\mathbf{b}] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Nel caso di moto circolare puro attorno a O con velocità angolare ω :

$$\mathbf{b} = mr^2 \boldsymbol{\omega}$$

Il fattore mr^2 è il **momento d'inerzia** del punto rispetto a O .

17 Teorema del Momento della Quantità di Moto. Conservazione del Momento Angolare

Teorema

In un sistema di riferimento inerziale, con polo O fisso:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

La derivata temporale del momento angolare rispetto a O è pari al momento risultante delle forze applicate rispetto a O .

Teorema – Conservazione del Momento Angolare

Se $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ rispetto a un polo fisso, allora $\mathbf{b} = \text{cost.}$

Osservazione – Forze centrali

Se la forza è sempre diretta verso un punto fisso O (**forza centrale**), allora $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ rispetto a O , e:

- il moto è piano,
- la velocità areolare è costante:

$$\frac{dS}{dt} = \text{cost.}$$

(II legge di Keplero per il moto planetario).

Osservazione – Polo in moto

Se il polo O si muove con velocità $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}$$

Esercizio 2.8 – Massa su piano con filo che si accorcia

Una massa m su piano orizzontale liscio è collegata a un filo che passa per un foro. Il filo viene tirato verso il basso con velocità costante v , riducendo il raggio r . All'istante $t = 0$: $r = r_0$, $\omega = \omega_0$. Trovare la tensione $T(r)$.

Soluzione.

Il momento risultante rispetto al foro O è nullo (la tensione passa per O , peso e reazione si annullano), quindi:

$$b = m\omega r^2 = m\omega_0 r_0^2 = \text{cost.} \implies \omega = \omega_0 \frac{r_0^2}{r^2}$$

La tensione fornisce la forza centripeta:

$$T = m\omega^2 r = \frac{m\omega_0^2 r_0^4}{r^3}$$

18 Descrizione del Moto in Sistemi non Inerziali

Se un sistema di riferimento non è inerziale, il II principio $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ non si applica direttamente. Indicando con $\mathbf{a}_a$ l'accelerazione assoluta e con $\mathbf{a}_r$ quella relativa al sistema non inerziale:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$$

dove $\mathbf{a}_t$ è l'accelerazione di trascinamento e $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ è l'accelerazione di Coriolis.

Per un osservatore nel sistema non inerziale, il II principio si scrive aggiungendo le **forze apparenti**:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_t - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = m\mathbf{a}_r$$

Nota – Forze apparenti: esempio dell'auto che frena

Le forze apparenti permettono di descrivere il moto in sistemi accelerati senza dover ricorrere al sistema inerziale esterno.

Sistema inerziale (osservatore esterno): quando un'auto frena, i passeggeri continuano il loro moto per inerzia mentre l'auto decelera.

Sistema non inerziale (osservatore nell'auto): i passeggeri sembrano spinti in avanti da una **forza di trascinamento** $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_T$, dove $\mathbf{a}_T$ è la decelerazione dell'auto. Questa forza non ha un'interazione fisica reale e non rispetta il III principio (non c'è un corpo su cui agisce la reazione).

Nota – Orbite circolari

Per un oggetto in orbita circolare di raggio r attorno a un corpo di massa M , la forza gravitazionale funge da forza centripeta:

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \implies v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Sistema non inerziale (astronauta in orbita): l'astronauta si sente in assenza di peso non perché la gravità sia nulla (è ancora $\sim 9 \text{ m/s}^2$ a 400 km di quota), ma perché è in caduta libera costante attorno alla Terra. Nel suo sistema di riferimento accelerato, la forza centrifuga apparente equilibra esattamente la gravità.

19 Forze Apparenti: la Forza Centrifuga

Definizione

La **forza centrifuga** è la forza apparente che un osservatore in un sistema non inerziale rotante vede applicata a ogni massa m in quiete nel sistema:

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = -m\mathbf{a}_t = m\omega^2 r \hat{r}$$

(diretta radialmente verso l'esterno).

Osservazione – Contributo alla forza peso

La forza peso include il contributo della forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre. All'equatore, dove la forza centrifuga è massima:

$$g \approx g_0 - R\omega^2 \cos^2 L$$

La differenza tra g al polo e all'equatore è $\approx 0,034 \text{ m/s}^2$; la forza centrifuga spiega gran parte di questa differenza.

Nota – Forza centrifuga e traiettoria per inerzia

La forza centrifuga “butta fuori” un corpo, ma è importante non fraintenderne la natura. Quando il vincolo cessa (es. si rompe il filo di una fionda), il corpo non viene spinto verso l'esterno: *prosegue per inerzia lungo la tangente al cerchio* nell'istante del distacco. L'impressione che sia spinto radialmente verso fuori è dovuta al fatto che l'osservatore continua a percepire sé stesso come solidale con il sistema rotante.

20 Forze Apparenti: la Forza di Coriolis

Quando un punto materiale si muove all'interno di un sistema di riferimento in rotazione, compare una seconda forza apparente:

Definizione

La **forza di Coriolis** è:

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del sistema non inerziale e $\mathbf{v}_r$ è la velocità del punto nel sistema non inerziale.

Osservazione

La forza di Coriolis è perpendicolare a $\mathbf{v}_r$: non compie lavoro ma devia la traiettoria. Sulla Terra è responsabile della deviazione dei venti (cicloni), della deflessione dei proiettili a lunga gittata e di altri fenomeni geofisici.

Esercizio 2.9 – Massa su disco rotante

Un disco orizzontale ruota con ω costante. Una massa m si muove lungo un diametro con velocità v costante rispetto al disco. Trovare la forza che il disco esercita sulla massa quando è a distanza d da O .

Soluzione.

Per l'osservatore sul disco (non inerziale), la risultante è nulla. Le forze apparenti sono:

- Centrifuga: $m\omega^2 d$ (radiale verso l'esterno)
- Coriolis: $2m\omega v$ (perpendicolare al moto nel piano del disco)

I tre termini (mg , $m\omega^2 d$, $2m\omega v$) sono mutuamente ortogonali, quindi il modulo della reazione del disco è:

$$F^* = m\sqrt{g^2 + \omega^4 d^2 + 4\omega^2 v^2}$$

21 Conclusioni sulla Dinamica del Punto

I tre principi della dinamica, enunciati in un sistema inerziale:

Teorema – I Principio

Un punto materiale non sottoposto ad azioni esterne è in quiete o in moto rettilineo uniforme.

Teorema – II Principio

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, equivalentemente $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$.

Teorema – III Principio

Le azioni reciproche tra due corpi puntiformi sono uguali, opposte e coassiali.

Il II principio si esprime anche come:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M}$$

Nei sistemi non inerziali si aggiungono alle forze reali le forze apparenti (centrifughe, di Coriolis).

21 Riepilogo delle Formule Principali

Grandezza	Formula	Note
II Principio	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	sistema inerziale
Quantità di moto	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	
II Principio (Newton)	$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$	anche per m variabile
Impulso	$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta\mathbf{p}$	
Gravitazione universale	$F = Gm_1m_2/r^2$	$G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Forza peso	$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$	$g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$
Accelerazione di gravità	$g = GM_T/R_T^2$	
Forza elastica	$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$	
Attrito statico (max)	$A_{\max} = \mu_s R_N$	$\mu_s = \tan \theta_1$
Attrito dinamico	$A_d = \mu_d R_N$	$\mu_d = \tan \theta_2 < \mu_s$
Spazio di arresto	$L = v_0^2/(2\mu_d g)$	
Viscosità lineare	$\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$	regime di Stokes
Legge di Stokes	$b = 6\pi r\eta$	sfera di raggio r
Oscillatore libero (ω_0)	$\omega_0 = \sqrt{k/m}$	
Oscillatore smorzato (ω')	$\omega' = \sqrt{k/m - (b/2m)^2}$	
Periodo pendolo	$T = 2\pi\sqrt{l/g}$	piccole oscillazioni
Misura di g	$g = 4\pi^2 l/T^2$	dal periodo del pendolo
Velocità orbitale	$v = \sqrt{GM/r}$	orbita circolare
Momento forza	$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	
Momento angolare	$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	
Teo. momento angolare	$\mathbf{M} = d\mathbf{b}/dt$	polo fisso, sist. inerziale
Forza centrifuga	$\mathbf{F}_{\text{cf}} = m\omega^2 r \hat{r}$	sistema rotante
Forza di Coriolis	$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$	sistema rotante

21 Esercizi di Riepilogo

Esercizio 2.1

Un palloncino di elio, trattenuto da una cordicella, sale alla velocità costante $v = 3,5 \text{ m/s}$ quando viene rilasciato. Determinare la forza F sulla cordicella, sapendo che il coefficiente di viscosità dell'aria è $b = 1,4 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}\text{s}$.

Esercizio 2.2

Due masse m e $2m$ su piano scabro (coefficiente μ), collegate da una fune, ricevono forze $F_1 = \alpha t$ e $F_2 = 2\alpha t$ opposte. Il sistema inizia a muoversi all'istante $\bar{t}$. All'istante $t_0 > \bar{t}$ la tensione è T_0 . Trovare α .

Esercizio 2.3

Un nastro trasportatore si muove a velocità costante v ; sabbia cade perpendicolarmente con portata di massa μ (kg/s). Determinare la forza orizzontale F per mantenere costante la velocità del nastro.

Esercizio 2.4

Una perlina di massa m scorre su un filo circolare di raggio r (in assenza di gravità). Velocità iniziale v_0 , coefficiente di attrito dinamico μ . Trovare $v(t)$.

Esercizio 2.5

Una cassa di $m = 10 \text{ kg}$ deve essere calata con una fune di carico di rottura $T_0 = 80 \text{ N}$. Stabilire se è possibile calarla a velocità costante; in caso contrario, trovare l'accelerazione minima.

Esercizio 2.6

Un getto di liquido di densità ρ , sezione S e velocità v impatta contro un cubo che si muove con velocità w opposta a v . Determinare la forza del getto sul cubo.

Esercizio 2.7

Una fune d'acciaio di lunghezza L ruota con ω costante attorno a un estremo O . La forza che la parte $[0, r]$ esercita sulla parte $[r, L]$ è F . Trovare la massa della fune. ($L = 1 \text{ m}$, $\omega = 2 \text{ rad/s}$, $F = 3 \text{ N}$, $r = 0,5 \text{ m}$.)

Esercizio 2.8

Sistema di pulegge con masse m_1 ed m_2 . Determinare: (1) tensione della fune di m_1 ; (2) accelerazioni delle due masse; (3) reazioni vincolari in P e Q .

Esercizio 2.9

Due pendoli di lunghezza $l_1 = 40$ cm e $l_2 = 45$ cm partono in fase. Dopo quanto tempo si ritrovano in fase per la prima volta?

Esercizio 2.10

Una massa M è collegata a una molla (k , lunghezza a riposo l) e, tramite un filo di lunghezza l_0 , a una massa m . Il sistema ruota con ω costante. Trovare la variazione di lunghezza della molla e la tensione del filo. ($M = 2$ kg, $m = 1$ kg, $l_0 = 0,2$ m, $l = 0,1$ m, $k = 10^3$ N/m, $\omega = 1$ rad/s.)

Esercizio 2.11

Un pendolo conico: massa m ruota su un cono di asse verticale con altezza h . Trovare la velocità angolare.

Esercizio 2.12

Un corpo di massa m scivola su un piano inclinato di α con coefficiente di attrito $\mu = \beta x$ (variabile con lo spazio). Trovare lo spazio percorso prima di fermarsi.

Esercizio 2.13

Un punto materiale di massa m si muove con velocità v costante lungo una guida su una piattaforma rotante (ω). Trovare la reazione vincolare quando la massa è a distanza $R/2$ dal centro.

Esercizio 2.14

Un corpo M su piano liscio è spinto da $\mathbf{F}$. Su di esso poggia m_1 , collegata a m_2 tramite una puleggia. Trovare F affinché m_1 e m_2 rimangano ferme rispetto a M .

Esercizio 2.15

Una corda di $L = 2,2$ m collega un punto fisso a un corpo $M = 3$ kg su piano scabro ($\mu = 0,2$), con estremi alla stessa altezza distanti $L' = 2$ m. Trovare il massimo valore di m agganciato a metà corda.

Esercizio 2.16

Una massa $m = 100$ g si muove sulla superficie di un cono di semiapertura $\alpha = 30^\circ$ con un filo di $l = 1$ m dal vertice. Trovare $\omega_{\min}$ per il distacco e la tensione corrispondente.

Esercizio 2.17

Un punto P si muove su una piattaforma rotante con ω costante; per un osservatore inerziale il moto è rettilineo uniforme. Scrivere le equazioni del moto rispetto a un osservatore sul centro della piattaforma.