

Appunti di Fisica Classica

Capitolo 3: Lavoro ed Energia per il Punto Materiale

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Lavoro · Energia cinetica · Forze conservative · Energia potenziale · Potenza
· Conservazione dell'energia

0 Indice

1	Approccio integrale alla dinamica	1
2	L'impulso	1
3	Definizione di lavoro	2
4	Energia cinetica e teorema del lavoro	3
5	Campi di forza conservativi	4
6	Energia potenziale	4
6.1	Energia potenziale della forza peso	5
6.2	Energia potenziale gravitazionale generale	5
6.3	Energia potenziale elastica	6
7	Conservazione dell'energia meccanica	6
8	Energia nell'oscillatore armonico	7
9	Energia potenziale di gravitazione e velocità di fuga	8
9.1	Orbita circolare	8
9.2	Velocità di fuga	8
10	Energia meccanica in campo conservativo	9
11	Potenza	10
12	Forze non conservative e variazione dell'energia meccanica	11
13	Conservazione dell'energia	12

1 Approccio integrale alla dinamica

Lo studio della dinamica condotto nei capitoli precedenti si è basato sull'analisi *locale*: le equazioni del moto $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ forniscono i valori istantanei di posizione, velocità e accelerazione. Esiste un approccio complementare, di tipo **integrale**, che integra le equazioni fondamentali su intervalli di tempo o di spazio.

Nota – Approccio integrale

L'integrazione della seconda legge di Newton — nel tempo o lungo la traiettoria — non aggiunge nuova fisica, ma introduce grandezze (impulso, lavoro, energia) che permettono di trattare problemi complessi in modo molto più rapido rispetto alla soluzione diretta delle equazioni differenziali.

2 L'impulso

Definizione – Impulso (Def. 3.1)

L'**impulso** $\mathbf{J}$ di una forza $\mathbf{F}(t)$ nell'intervallo $[t_1, t_2]$ è l'integrale della forza nel tempo:

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt.$$

Le sue dimensioni sono $[MLT^{-1}]$, le stesse della quantità di moto.

Teorema – Impulso-Quantità di moto (Teo. 3.1)

L'impulso di una forza risultante è uguale alla variazione della quantità di moto del punto materiale:

$$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1.$$

Dimostrazione

Dalla seconda legge di Newton $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p}.$$

□

Osservazione – Forza media

Per un intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$, si definisce la **forza media**:

$$\mathbf{F}_{\text{med}} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}.$$

Essa è utile quando la forza non è nota punto per punto nel tempo, ma si conosce la variazione complessiva della quantità di moto.

Nota – Esempio: urto di un martello su un chiodo

Sia un martello di massa $m = 1 \text{ kg}$ che colpisce un chiodo con velocità $v_0 = 5 \text{ m/s}$, rimbalzando elasticamente (inversione della velocità). La variazione della quantità di moto è

$$|\Delta \mathbf{p}| = 2mv_0 = 2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m/s} = 10 \text{ kg m/s}.$$

Se la durata dell'urto è $\Delta t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, la forza media è:

$$F_{\text{med}} = \frac{|\Delta \mathbf{p}|}{\Delta t} = \frac{10}{3 \cdot 10^{-3}} \text{ N} \approx 3333 \text{ N} \approx 340 \text{ kg-peso}.$$

Una forza piccola applicata per un brevissimo tempo può generare un impulso enorme, sufficiente a conficcare un chiodo.

3 Definizione di lavoro

Definizione – Lavoro (Def. 3.2)

Il **lavoro** L compiuto da una forza $\mathbf{F}$ per spostare il suo punto di applicazione da una posizione 1 a una posizione 2 lungo una curva C è l'integrale di linea:

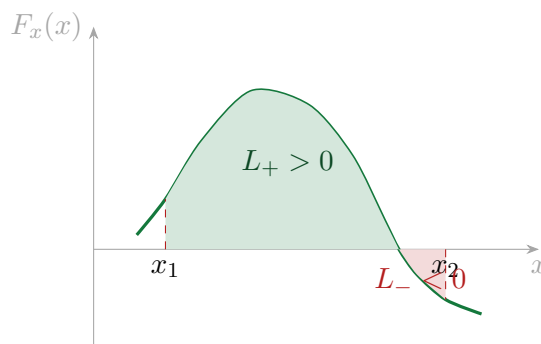
$$L = \int_{1,C}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{1,C}^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Il lavoro è una *grandezza scalare*. Nel SI si misura in **joule**: $1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$.

Osservazione – Significato geometrico

Il prodotto scalare $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos \omega$ mostra che contribuisce al lavoro solo la componente della forza *parallela* allo spostamento elementare. La componente ortogonale non compie lavoro. In particolare:

- $L > 0$ se forza e spostamento formano un angolo acuto;
- $L = 0$ se sono perpendicolari (es. forza centripeta nel moto circolare uniforme, reazione vincolare normale);
- $L < 0$ se formano un angolo ottuso.



Nel moto unidimensionale il lavoro $L_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) dx$ coincide con l'area con segno sotto il grafico di $F_x(x)$.

Nota – Lavoro nel moto di rotazione

Nel caso di un punto che ruota attorno a un polo fisso O , si ha $dL = M_\theta d\theta$, dove M_θ è il momento della forza rispetto a O e θ è l'angolo di rotazione. Il lavoro totale è dunque $L = \int M_\theta d\theta$, formula del tutto analoga a quella traslazionale.

4 Energia cinetica e teorema del lavoro

Definizione – Energia cinetica (Def. 3.3)

L'**energia cinetica** di un punto materiale di massa m e velocità scalare v è:

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Ha le stesse dimensioni del lavoro e si misura in joule. Rappresenta la *capacità del corpo in moto di compiere lavoro* contro una forza che contrasti il suo moto.

Teorema – Teorema del lavoro e dell'energia cinetica (Teo. 3.2)

Il lavoro compiuto dalla forza risultante applicata a un punto materiale nel passaggio dalla posizione 1 alla posizione 2 è uguale alla variazione di energia cinetica:

$$L_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T.$$

Dimostrazione

Partendo dalla definizione di lavoro e dalla seconda legge di Newton $\mathbf{F} = m \, d\mathbf{v}/dt$:

$$L_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \, dt.$$

Sfruttando l'identità $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} d(v^2)$:

$$L_{12} = \int_{v_1}^{v_2} m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2} m \, d(v^2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta T.$$

□

Osservazione – Invarianza e relatività dell'energia cinetica

Il Teorema 4 vale *qualunque* siano le forze (conservative o non conservative) che agiscono sul punto. Poiché la velocità dipende dal sistema di riferimento, anche l'energia cinetica è relativa: un oggetto può avere $T = 0$ rispetto a un osservatore e $T \neq 0$ rispetto a un altro. Ciò che è invariante è la *variazione* ΔT , collegata al lavoro compiuto dalla forza risultante in quel sistema.

Esercizio 3.2

Una massa puntiforme m si muove su una superficie orizzontale liscia sotto l'azione di una forza orizzontale che sviluppa una potenza costante P . La velocità all'istante $t = 0$ è v_0 e la forza è parallela alla velocità. Determinare la forza a $t = 0$ e il tempo $\bar{t}$ affinché la velocità diventi $2v_0$.

Soluzione. Per la definizione di potenza ($P = Fv$), all'istante $t = 0$:

$$F_0 = \frac{P}{v_0}.$$

Poiché $P = dL/dt$ e dal teorema delle forze vive $P dt = dT$, integrando tra 0 e $\bar{t}$:

$$P\bar{t} = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{3mv_0^2}{2P}.$$

5 Campi di forza conservativi

Definizione – Forza conservativa (Def. 3.4)

Una forza si dice **conservativa** se il lavoro che compie per spostare un punto materiale da P_1 a P_2 è *indipendente dal percorso* e dipende solo dalle posizioni iniziale e finale. Equivalentemente, il lavoro lungo qualsiasi percorso chiuso è nullo:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Osservazione – Esempi di forze conservative

a. Forze uniformi. Una forza $\mathbf{F}$ costante in direzione, verso e intensità (es. peso in regioni limitate) è conservativa: il lavoro $L = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s}$ dipende solo dallo spostamento netto.

b. Forze centrali. Una forza $\mathbf{F} = \pm F(r) \hat{\mathbf{r}}$ diretta verso un centro fisso con intensità funzione della sola distanza r è conservativa. Il lavoro elementare è $dL = \pm F(r) dr$, che dipende solo da r , non dall'angolo. Rientrano in questa categoria la forza gravitazionale, la forza di Coulomb e la forza elastica (monodimensionale).

c. Forza elastica. $\mathbf{F} = -kx \mathbf{i}$: il lavoro tra x_1 e x_2 è $L = -k(x_2^2 - x_1^2)/2$, indipendente dal percorso.

6 Energia potenziale

Definizione – Energia potenziale (Def. 3.5)

In un campo di forze conservative si definisce l'**energia potenziale** $U(x, y, z)$ come la funzione scalare tale che:

$$L_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U_{12}.$$

La funzione U è determinata a meno di una costante additiva arbitraria (scelta del riferimento). Dimensionalmente coincide con il lavoro: $[U] = \text{J}$.

Proposizione – Forza come gradiente dell'energia potenziale (Prop. 3.1)

Le componenti di una forza conservativa sono le derivate parziali negative dell'energia potenziale:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

ovvero in forma vettoriale:

$$\mathbf{F} = -\nabla U.$$

Dimostrazione

Considerando uno spostamento $d\mathbf{s}$ in direzione arbitraria $\hat{\mathbf{n}}$, per definizione:

$$-dU = dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Espandendo le componenti cartesiane e identificando le derivate parziali si ottiene immediatamente $F_x = -\partial U/\partial x$ e analogamente per y e z . $\square$

6.1 Energia potenziale della forza peso

Scegliendo l'asse y verso il basso nella direzione del peso $\mathbf{F} = mg\mathbf{j}$, il lavoro elementare è $dL = mg dy$. Ponendo $U = 0$ per $y = 0$:

$$U(y) = -mgy.$$

Con l'asse y verso l'alto (convenzione più comune), la forza peso è $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ e l'energia potenziale risulta:

$$U_g = mgy,$$

con il riferimento $U_g = 0$ per $y = 0$ (piano di riferimento).

6.2 Energia potenziale gravitazionale generale

Per due masse M e m a distanza r , la forza è $\mathbf{F} = -GMm\hat{\mathbf{r}}/r^2$ (attrattiva). Il lavoro per un moto radiale da r_1 a r_2 è:

$$L_{12} = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} dr = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Ponendo $U(\infty) = 0$, si ricava:

$$U_g(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

Il segno negativo riflette la natura attrattiva: l'energia potenziale cresce avvicinandosi all'infinito da valori negativi verso zero.

6.3 Energia potenziale elastica

Per la forza elastica $\mathbf{F} = -kx \mathbf{i}$, il lavoro tra x_1 e x_2 è:

$$L_{12} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2.$$

Ponendo $U_{\text{el}} = 0$ per $x = 0$ (posizione di equilibrio):

$$U_{\text{el}}(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Nota – Derivazione dell'energia potenziale elastica (Lez. 10)

Il segno è positivo: quando la molla è compressa o allungata, l'energia potenziale elastica *cresce* rispetto all'equilibrio. Essa si trasforma in energia cinetica al rilascio, generando il moto armonico. La verifica è immediata: $F = -dU_{\text{el}}/dx = -kx$, che è proprio la forza di Hooke.

7 Conservazione dell'energia meccanica

Definizione – Energia meccanica (Def. 3.6)

L'**energia meccanica totale** è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$E = T + U.$$

Teorema – Conservazione dell'energia meccanica (Teo. 3.3)

Se tutte le forze agenti su un punto materiale sono conservative, l'energia meccanica si conserva durante il moto:

$$E = T + U = \text{costante}, \quad \text{ovvero} \quad T_1 + U_1 = T_2 + U_2.$$

Dimostrazione

Per il Teorema 4, $L_{12} = \Delta T$. Poiché le forze sono tutte conservative, $L_{12} = -\Delta U$. Quindi $\Delta T = -\Delta U$, ovvero $\Delta T + \Delta U = 0$, che equivale a $\Delta E = 0$. $\square$

Nota – Esempi dalla lezione (Lez. 10)

Caduta su piano inclinato (senza attrito). Un corpo di massa m parte da fermo a quota h . All'arrivo ($U_f = 0$, scelto come riferimento):

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gh}.$$

Il risultato è indipendente dalla massa e dall'inclinazione del piano: conta solo il dislivello h .

Massa e molla. Un corpo scivola da quota h e comprime una molla di costante k . Nella posizione di massima compressione d , tutta l'energia cinetica è diventata energia

potenziale elastica:

$$mgh = \frac{1}{2}kd^2 \implies d = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}.$$

Osservazione – Superfici equipotenziali

Le superfici su cui $U = \text{cost}$ si chiamano **superfici equipotenziali**: su di esse il lavoro della forza conservativa è nullo, perché $\Delta U = 0$. La forza è sempre *perpendicolare* alle superfici equipotenziali. Esempi: piani orizzontali per la forza peso; sfere concentriche per la forza gravitazionale.

Esercizio 3.4

Un pendolo semplice (massa m , lunghezza l) è rilasciato da fermo con il filo a un angolo ω_0 dalla verticale. Trovare la velocità in funzione dell'angolo ω e la tensione del filo.

Soluzione. Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra la posizione iniziale (quota $h = l(1 - \cos \omega_0)$ rispetto al punto più basso) e la posizione generica (quota $h' = l(1 - \cos \omega)$):

$$mgh = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgh' \implies v_P(\omega) = \sqrt{2gl(\cos \omega - \cos \omega_0)}.$$

Proiettando la seconda legge di Newton lungo il filo in P : $T_P - mg \cos \omega = mv_P^2/l$, da cui:

$$T_P(\omega) = mg(3 \cos \omega - 2 \cos \omega_0).$$

In particolare, nel punto più basso ($\omega = 0$): $T_B = mg(3 - 2 \cos \omega_0) > mg$, poiché il filo deve fornire anche la forza centripeta.

8 Energia nell'oscillatore armonico

Per un oscillatore armonico (massa m , molla di costante k , posizione di equilibrio $x = 0$) il moto è $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Le energie sono:

$$T(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Teorema – Energia totale dell'oscillatore armonico (Teo. 3.4)

L'energia meccanica totale dell'oscillatore armonico è costante e pari all'energia potenziale massima (o cinetica massima):

$$E = T + U = \frac{1}{2}kA^2.$$

Osservazione – Scambio cinetica-potenziale

T e U oscillano tra 0 e $\frac{1}{2}kA^2$ con frequenza *doppia* rispetto al moto ($\sin^2$ e $\cos^2$ hanno periodo $T_0/2$). Il valor medio di ciascuna è $\frac{1}{4}kA^2 = E/2$. Nell'istante in cui il punto passa per l'equilibrio ($x = 0$), tutta l'energia è cinetica; agli estremi

$(x = \pm A)$, tutta è potenziale.

Esercizio 3.10

Una massa m attaccata a una molla di costante k compie un moto armonico di ampiezza x_0 . A quale distanza dal centro delle oscillazioni l'energia cinetica è uguale a quella potenziale?

Soluzione. Imponendo $T = U$: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$. Dalla conservazione dell'energia $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(x_0^2 - x^2)$, quindi $\frac{1}{2}k(x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}kx^2$, da cui $x_0^2 = 2x^2$ e

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}.$$

9 Energia potenziale di gravitazione e velocità di fuga

L'energia potenziale gravitazionale generale $U_g(r) = -GMm/r$ (Sez. 6) si annulla all'infinito e cresce (rimanendo negativa) man mano che il corpo si allontana dal centro attrattore.

9.1 Orbita circolare

Per un'orbita circolare di raggio R , l'equilibrio tra forza gravitazionale e centripeta fornisce la velocità orbitale:

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv_{\text{orb}}^2}{R} \implies v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

L'energia meccanica totale risulta:

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv_{\text{orb}}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}.$$

Nota – Energia di orbita circolare (Lez. 11)

L'energia meccanica è *negativa*: il sistema è *legato*. Per liberare il corpo dalla gravità è necessario fornire energia. Se $E = 0$ (velocità di fuga), il corpo raggiunge l'infinito con velocità nulla; se $E > 0$, il corpo non è legato e segue una traiettoria iperbolica.

9.2 Velocità di fuga

Definizione – Velocità di fuga (Def. 3.7)

La **velocità di fuga** v_f è la velocità minima da imprimere a un corpo sulla superficie di un astro (raggio R , massa M) perché raggiunga l'infinito con velocità nulla.

Proposizione – Formula della velocità di fuga (Prop. 3.2)

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Per la Terra ($M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m) si ottiene $v_f \approx 11,2$ km/s.

Dimostrazione

Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra la superficie ($r = R$) e l'infinito ($r \rightarrow \infty$), con $T_\infty = 0$ e $U(\infty) = 0$:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \implies v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

□

Nota – Atmosfere planetarie (Lez. 11)

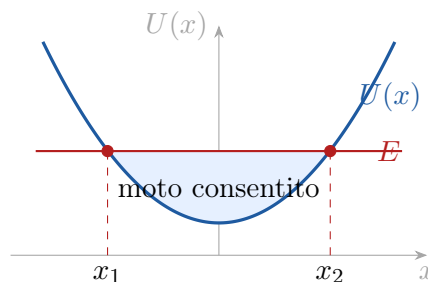
La velocità di fuga determina quali molecole gassose riescono a sfuggire dall'atmosfera di un pianeta. Le molecole di un gas a temperatura T hanno una distribuzione di velocità termiche: le più leggere (idrogeno, elio) possono raggiungere v_f e fuggire, mentre quelle pesanti (azoto, ossigeno) rimangono legate. La Luna, con v_f più bassa della Terra, ha perso la sua atmosfera; il Sole, con v_f molto più alta, trattiene persino l'idrogeno.

10 Energia meccanica in campo conservativo

È istruttivo analizzare il moto di un punto in un campo conservativo monodimensionale, dove l'energia potenziale $U(x)$ è nota. Dalla conservazione dell'energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \implies v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}.$$

Il moto è possibile solo nelle regioni dove $E \geq U(x)$; i punti x_i in cui $E = U(x_i)$ sono i **punti di inversione**, dove la velocità si annulla e il moto si inverte.



Il moto è possibile solo dove $E \geq U(x)$; le intersezioni tra il livello energetico e il potenziale individuano i punti di inversione.

Osservazione – Equilibrio stabile e instabile

Nei punti stazionari dell'energia potenziale ($dU/dx = 0$) la forza conservativa è nulla: sono posizioni di equilibrio.

- **Minimo di U :** equilibrio stabile ($d^2U/dx^2 > 0$). Un piccolo spostamento genera una forza di richiamo verso l'equilibrio.
- **Massimo di U :** equilibrio instabile ($d^2U/dx^2 < 0$). Un piccolo spostamento genera una forza che allontana dall'equilibrio.
- **Flesso orizzontale:** equilibrio indifferente ($d^2U/dx^2 = 0$).

In prossimità di un minimo, $U(x)$ può essere approssimata da una parabola $U \approx \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + U_0$: il moto risultante è *armonico*.

Nota – Curve di potenziale efficace e orbite (Lez. 11)

Per un corpo soggetto alla sola gravitazione, le orbite possono essere analizzate qualitativamente tramite la curva di potenziale gravitazionale $U_g(r)$. Oggetti con $E < 0$ sono legati (orbite ellittiche o circolari); oggetti con $E = 0$ percorrono parabole; con $E > 0$ percorrono iperbole. Un oggetto interstellare in transito nel sistema solare ha $E > 0$.

Osservazione – Fionda gravitazionale

Un'astronave che transita in prossimità di un pianeta in moto può *acquistare* energia cinetica, come avviene con la sonda Cassini-Huygens (lanciata nel 1997, ha effettuato sorvoli di Venere, Terra e Giove prima di raggiungere Saturno nel 2004). Non vi è violazione della conservazione dell'energia: il pianeta perde un'energia trascurabile a causa della sua massa enormemente maggiore. Il campo gravitazionale, pur conservativo in sé, varia nel tempo per il moto del pianeta, rendendo possibile il trasferimento netto.

11 Potenza

Definizione – Potenza (Def. 3.8)

La **potenza** P è la rapidità con cui viene compiuto lavoro:

$$P = \frac{dL}{dt}.$$

La potenza **istantanea** si esprime come:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

L'unità di misura nel SI è il **watt**: $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$. Il kilowattora è un'unità di lavoro: $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$.

Nota – Moto a potenza costante con resistenza viscosa (Lez. 11)

Si consideri un corpo soggetto a una forza motrice a potenza costante P e a una forza resistente proporzionale alla velocità $F_r = bv$. L'equazione del moto è:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{P}{v} - bv.$$

Separando le variabili e integrando, si ottiene:

$$v(t) = \sqrt{\frac{P}{b}} \left(1 - e^{-\frac{2b}{m}t} \right).$$

Per $t \rightarrow \infty$, la velocità tende asintoticamente alla **velocità limite**:

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{P}{b}}.$$

Questo modello descrive il comportamento realistico di un veicolo: la velocità finale è limitata sia dalla potenza del motore sia dalla resistenza del fluido.

12 Forze non conservative e variazione dell'energia meccanica

Definizione – Forze non conservative (Def. 3.9)

Le **forze non conservative** sono forze il cui lavoro dipende dal percorso e non è esprimibile come variazione di una funzione di stato. Il lavoro lungo un percorso chiuso non è generalmente nullo. Esempi tipici: attrito dinamico, resistenza viscosa dei fluidi.

Teorema – Variazione dell'energia meccanica (Teo. 3.5)

In presenza sia di forze conservative che non conservative, la variazione dell'energia meccanica è uguale al lavoro compiuto dalle sole forze non conservative:

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = W_{\text{nc}}.$$

Dimostrazione

Dal Teorema 4: $\Delta T = L_{\text{tot}} = L_c + L_{\text{nc}}$. Poiché le forze conservative soddisfano $L_c = -\Delta U$, si ha: $\Delta T = -\Delta U + W_{\text{nc}}$, ovvero $\Delta T + \Delta U = W_{\text{nc}}$. $\square$

Nota – Osservazioni pratiche (Lez. 11)

Il lavoro delle forze non conservative è *positivo* se esse forniscono energia al sistema (es. motore), *negativo* se la sottraggono (es. attrito). La formula permette di applicare un bilancio energetico senza dover determinare il profilo di forza istantaneo.

Esercizio 3.3

Un corpo di massa m è spinto lungo un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito dinamico μ) da una forza costante F inclinata verso il basso di un angolo α rispetto all'orizzontale. Per uno spostamento d , determinare il lavoro di F , il lavoro dell'attrito e la velocità finale (partendo da fermo).

Soluzione. La reazione normale vale $R_N = mg + F \sin \alpha$, quindi:

$$L_F = F \cos \alpha \cdot d, \quad L_A = -\mu(mg + F \sin \alpha) d.$$

Applicando il teorema del lavoro e dell'energia cinetica (peso e reazione normale non compiono lavoro):

$$\frac{1}{2}mv^2 = F \cos \alpha d - \mu(mg + F \sin \alpha) d \implies v = \sqrt{\frac{2d}{m} [F \cos \alpha - \mu(mg + F \sin \alpha)]}.$$

Esercizio – Piano inclinato con attrito

Una massa m scende da fermo lungo un piano inclinato di lunghezza l , angolo θ e coefficiente di attrito dinamico μ_d . Trovare la velocità alla base.

Soluzione. Il lavoro dell'attrito (unica forza non conservativa) è $W_{nc} = -\mu_d mg \cos \theta \cdot l$. Applicando il Teorema 12 con $\Delta U = -mgl \sin \theta$ (quota diminuita di $H = l \sin \theta$):

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgl \sin \theta = -\mu_d mgl \cos \theta \implies v = \sqrt{2gl(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)}.$$

13 Conservazione dell'energia

Osservazione – Il principio di conservazione dell'energia

Ogni volta che forze non conservative compiono lavoro spostando un punto materiale, si manifesta parallelamente un altro processo fisico nel sistema (produzione di calore, onde sonore, separazione di cariche elettriche, ecc.), corrispondente alla comparsa di una *nuova forma di energia*. La variazione di queste energie aggiuntive bilancia esattamente il lavoro delle forze non conservative.

Generalizzando, si enuncia il **principio di conservazione dell'energia**:

$$E_{\text{tot}} = T + U + E_{\text{int}} + \dots = \text{costante}.$$

In qualsiasi processo, l'energia può trasformarsi da una forma all'altra, ma non può essere né creata né distrutta. Questo è uno dei principi fondamentali della fisica classica, con validità estremamente ben verificata sperimentalmente.

Osservazione – Cenno alla relatività ristretta

La meccanica newtoniana si basa sull'assunzione di spazio e tempo assoluti. Per velocità v confrontabili con c (velocità della luce), occorre usare la **relatività ristretta** di Einstein (1905), basata su due postulati: l'invarianza delle leggi fisiche per tutti gli osservatori inerziali, e la costanza di c nel vuoto. Le trasformazioni di Lorentz sostituiscono quelle galileiane. Per $v \ll c$ la meccanica relativistica si riduce a quella newtoniana, il che spiega il successo di quest'ultima per i fenomeni ordinari (moto dei pianeti, sistemi atomici). La celebre relazione $E = mc^2$ emerge come conseguenza naturale della struttura relativistica.