

Appunti di Fisica Classica

Capitolo 4: Meccanica dei Sistemi di Punti Materiali

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Centro di Massa · Equazioni Cardinali · Teorema di König · Urti

0 Indice

1	Introduzione	1
2	Centro di Massa	1
2.1	Prima Equazione Cardinale della Meccanica	2
3	Conservazione della Quantità di Moto	3
4	Seconda Equazione Cardinale: Momento Angolare	3
5	Dal Discreto al Continuo: Densità	5
6	Energia Cinetica: Teorema di König	5
7	Energia Potenziale e Conservazione dell'Energia	6
8	Urti	7
8.1	Urto Elastico Centrale Unidimensionale	8
8.2	Urto Completamente Anelastico	9
8.3	Pendolo Balistico	9
9	Le Leggi di Keplero	10
10	Equazioni Cardinali dell'Equilibrio	11

1 Introduzione

Fino ad ora abbiamo studiato la dinamica di un *singolo* punto materiale. Molti sistemi fisici non ammettono però questa schematizzazione: la rotazione di un corpo rigido, le vibrazioni interne di un solido, o l'esplosione di un proiettile richiedono un modello più articolato.

In questo capitolo estendiamo l'analisi a un sistema di N punti materiali, ciascuno caratterizzato da massa m_i , posizione $\mathbf{R}_i$, velocità $\mathbf{V}_i$ e accelerazione $\mathbf{A}_i$. Le forze agenti su ogni punto si dividono in *forze interne* (scambiate fra i punti del sistema) e *forze esterne* (esercitate da agenti esterni al sistema).

Il risultato fondamentale — che emergerà dalle equazioni cardinali — è che il moto globale del sistema (centro di massa, momento angolare totale) è governato *esclusivamente* dalle forze esterne, indipendentemente dalla natura delle forze interne.

2 Centro di Massa

Definizione – Centro di Massa (Def. 4.1)

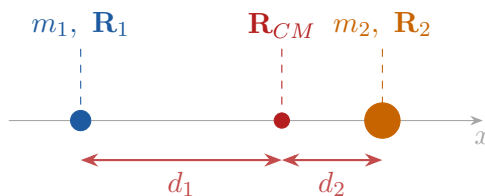
Dato un sistema di N punti materiali di masse m_i e posizioni $\mathbf{R}_i$, si definisce **centro di massa** (CM) il punto dello spazio di posizione

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i}{M_{\text{tot}}}, \quad M_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Per un corpo continuo di densità volumetrica $\rho(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Il CM non appartiene necessariamente al sistema: è un punto dello spazio definito dalla distribuzione delle masse. Se il sistema presenta un piano, un asse o un centro di simmetria, il CM deve appartenere a tale elemento di simmetria.



Nel caso di due masse su una retta, il centro di massa cade più vicino alla massa maggiore:
 $m_1 d_1 = m_2 d_2$.

Osservazione – Additività del Centro di Massa

Se un sistema è scomponibile in due sottosistemi di masse m_1 , m_2 e centri di massa

$\mathbf{R}_{C1}$, $\mathbf{R}_{C2}$, il CM dell'intero sistema è la media pesata dei CM parziali:

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{R}_{C1} + m_2 \mathbf{R}_{C2}}{m_1 + m_2}.$$

Questa proprietà si estende a qualunque numero di sottosistemi e permette di calcolare il CM di distribuzioni complesse per decomposizione in parti più semplici.

2.1 Prima Equazione Cardinale della Meccanica

Teorema – Prima Equazione Cardinale (Teo. 4.1)

La risultante delle forze esterne applicate a un sistema di N punti è uguale alla massa totale moltiplicata per l'accelerazione del centro di massa:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = M_{\text{tot}} \mathbf{A}_{CM}.$$

In termini di quantità di moto totale $\mathbf{P}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}} \mathbf{V}_{CM}$:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{tot}}}{dt}.$$

Dimostrazione

Derivando due volte la definizione di $\mathbf{R}_{CM}$ rispetto al tempo:

$$\mathbf{A}_{CM} = \frac{d^2 \mathbf{R}_{CM}}{dt^2} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{A}_i.$$

Scriviamo l'equazione del moto per ogni punto i , distinguendo contributi interni ed esterni:

$$\mathbf{F}_{i,\text{int}} + \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = m_i \mathbf{A}_i.$$

Sommando su tutti gli N punti:

$$\underbrace{\sum_i \mathbf{F}_{i,\text{int}}}_{=0} + \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = \sum_i m_i \mathbf{A}_i = M_{\text{tot}} \mathbf{A}_{CM}.$$

La somma delle forze interne è nulla per il III principio della dinamica: a ogni $\mathbf{F}_{ij}$ corrisponde $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$, quindi i contributi si cancellano a coppie. $\square$

Nota – Forze interne e moto del CM (Lez. 12)

Le forze interne non influenzano il moto del centro di massa. Un proiettile in volo che esplode in più frammenti — processo interamente governato da forze interne — non altera la traiettoria del CM: quest'ultima rimane la stessa parabola che avrebbe percorso il

proiettile integro, perché l'unica forza esterna rilevante è la gravità.

3 Conservazione della Quantità di Moto

Teorema – Conservazione della Quantità di Moto (Teo. 4.2)

Se la risultante delle forze esterne è nulla in ogni istante, la quantità di moto totale del sistema si conserva:

$$\sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{P}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}} \mathbf{V}_{CM} = \text{cost.}$$

Nota – Esempio: uomo su zattera (Lez. 12)

Consideriamo un uomo di massa m su una zattera di massa M e lunghezza L , inizialmente in quiete su acqua calma. Poiché non vi sono forze esterne orizzontali, il CM del sistema rimane fisso durante l'intera interazione. Quando l'uomo si sposta da un bordo all'altro, la zattera trasla nella direzione opposta; imponendo la stazionarietà del CM si ricava:

$$x_{\text{zattera}} = \frac{mL}{M+m}.$$

Lo spostamento della zattera è proporzionale al rapporto tra la massa dell'uomo e la massa totale del sistema.

4 Seconda Equazione Cardinale: Momento Angolare

Definizione – Momento Angolare Totale (Def. 4.2)

Il momento angolare totale di un sistema rispetto a un polo O è:

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \times m_i \mathbf{V}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{b}_i,$$

dove $\mathbf{b}_i = \mathbf{R}_i \times m_i \mathbf{V}_i$ è il momento angolare del singolo punto rispetto a O .

Teorema – Seconda Equazione Cardinale (Teo. 4.3)

La derivata temporale del momento angolare totale di un sistema, calcolata rispetto a un polo *fisso* O oppure rispetto al *centro di massa*, è uguale al momento risultante delle sole forze esterne:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i,\text{ext}}^{(O)} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt}.$$

Dimostrazione

Deriviamo il momento angolare totale:

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_i \times m_i \mathbf{V}_i) = \sum_i \left(\underbrace{\mathbf{V}_i \times m_i \mathbf{V}_i}_{=0} + \mathbf{R}_i \times m_i \mathbf{A}_i \right) = \sum_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_i.$$

I momenti delle forze interne si annullano a coppie: le forze $\mathbf{F}_{ij}$ e $\mathbf{F}_{ji}$ sono uguali, opposte e *collineari* (dirette lungo la congiungente $P_i P_j$), quindi i loro bracci rispetto a O coincidono e i momenti si cancellano. Resta solo il contributo delle forze esterne. $\square$

Osservazione – Scelta del polo

Nel caso generale in cui il polo si muova con velocità $\mathbf{V}_0$, la seconda equazione cardinale diventa:

$$\sum_i \mathbf{M}_{i,\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} + \mathbf{V}_0 \times \mathbf{P}_{\text{tot}}.$$

Il termine aggiuntivo $\mathbf{V}_0 \times \mathbf{P}_{\text{tot}}$ si annulla in due casi: (a) il polo è fisso ($\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$); (b) il polo coincide con il CM (allora $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{CM}$ e $\mathbf{P}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}} \mathbf{V}_{CM}$ sono proporzionali, il loro prodotto vettoriale è nullo). **Si preferisce dunque scegliere come polo un punto fisso o il centro di massa.**

Teorema – Conservazione del Momento Angolare (Teo. 4.4)

Se il momento risultante delle forze esterne rispetto a un polo fisso (o al CM) è nullo in ogni istante:

$$\sum_i \mathbf{M}_{i,\text{ext}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L}_{\text{tot}} = \text{cost.}$$

Nota – Esempi di conservazione del momento angolare (Lez. 12)

Il principio si manifesta su scale molto diverse:

- **Sport (pattinatore, tuffatore):** portando le braccia al corpo si riduce il momento d'inerzia I ; poiché $L = I\omega$ è costante, la velocità angolare ω aumenta. Il tuffatore sfrutta questo effetto per accelerare la rotazione in aria e poi distendersi prima di entrare in acqua.
- **Orbite dei pianeti:** la velocità areolare costante (seconda legge di Keplero) è conseguenza diretta della conservazione del momento angolare per la forza gravitazionale centrale. Quanto più il pianeta si avvicina al perielio, tanto maggiore è la sua velocità orbitale.
- **Astrofisica:** la rilevazione di onde gravitazionali (2015) prodotte dalla collisione di buchi neri ha mostrato come la frequenza di rotazione cresca rapidamente al diminuire della distanza reciproca — segnatura diretta della conservazione di $\mathbf{L}$.

5 Dal Discreto al Continuo: Densità

Nota – Corpi continui e densità (Lez. 12)

Per estendere la dinamica ai corpi continui si sostituisce la sommatoria discreta con un integrale, introducendo il concetto di **densità** che lega la massa alle coordinate spaziali:

- **Densità lineare** λ : $dm = \lambda dl$ (filo, bacchetta).
- **Densità superficiale** σ : $dm = \sigma dA$ (lamina).
- **Densità volumetrica** ρ : $dm = \rho dV$ (corpo tridimensionale).

La posizione del CM di un corpo continuo diventa:

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm}.$$

Bacchetta omogenea ($\lambda = M/L = \text{cost}$, lunghezza L):

$$X_{CM} = \frac{\int_0^L x \lambda dx}{\int_0^L \lambda dx} = \frac{\lambda [x^2/2]_0^L}{\lambda L} = \frac{L}{2}.$$

Il CM è al centro, come si poteva dedurre dalla simmetria.

Bacchetta a densità variabile ($\lambda(x) = \alpha x$, più densa lontano dall'origine):

$$X_{CM} = \frac{\int_0^L x(\alpha x) dx}{\int_0^L \alpha x dx} = \frac{\alpha [x^3/3]_0^L}{\alpha [x^2/2]_0^L} = \frac{2}{3}L.$$

Il CM si sposta verso la zona più densa della bacchetta.

6 Energia Cinetica: Teorema di König

Teorema – Teorema di König (Teo. 4.5)

L'energia cinetica totale di un sistema di N punti si scompone nella somma di due contributi indipendenti:

$$T_{\text{tot}} = T_{CM} + T_{\text{rel}},$$

dove

$$T_{CM} = \frac{1}{2} M_{\text{tot}} V_{CM}^2$$

è l'energia cinetica di traslazione del CM, e

$$T_{\text{rel}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_{i,\text{rel}}^2$$

è l'energia cinetica dei punti nel sistema di riferimento solidale con il CM (energia cinetica *interna* o *propria*).

Dimostrazione

Decomponiamo la velocità di ogni punto come somma della velocità del CM e di una velocità relativa al CM:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{v}_{i,rel}, \quad \mathbf{v}_{i,rel} = \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{CM}.$$

L'energia cinetica totale diventa:

$$\begin{aligned} T_{tot} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{v}_{i,rel})^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} V_{CM}^2 \sum_i m_i}_{T_{CM}} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,rel}^2}_{T_{rel}} + \underbrace{\mathbf{V}_{CM} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_{i,rel}}_{=0}. \end{aligned}$$

Il termine misto si annulla per definizione di velocità relativa al CM:

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_{i,rel} = \sum_i m_i (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{CM}) = M_{tot} \mathbf{V}_{CM} - M_{tot} \mathbf{V}_{CM} = \mathbf{0}.$$

□

Osservazione – Applicazioni del Teorema di König (Lez. 13)

- **Corpo rigido in moto generico:** T_{CM} è l'energia di traslazione del CM, T_{rel} è l'energia di rotazione interna.
- **Urti completamente anelastici:** il moto del CM non è perturbato dall'urto (le forze interne non lo modificano). Quindi T_{CM} si conserva durante l'urto, mentre T_{rel} rappresenta *esattamente* la quota di energia cinetica dissipata in calore, deformazione o suono.

7 Energia Potenziale e Conservazione dell'Energia

Teorema – Lavoro e Energia Cinetica per Sistemi (Teo. 4.6)

La variazione di energia cinetica di un sistema di punti è pari al lavoro compiuto da *tutte* le forze agenti — esterne e interne:

$$\Delta T = L_{ext} + L_{int}.$$

Nota – Forze interne ed energia (Lez. 13)

A differenza delle equazioni cardinali (dove le forze interne si annullano), nel bilancio energetico le forze interne contribuiscono in generale. Sebbene siano uguali e opposte per il III principio, gli spostamenti dei punti su cui agiscono sono in generale diversi: i lavori non si cancellano. È proprio questo meccanismo che permette, ad esempio, a una molla interna di accumulare o rilasciare energia cinetica.

Se tutte le forze (interne ed esterne) sono conservative, esiste un'energia potenziale del sistema $U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$ e vale la conservazione dell'energia meccanica.

Teorema – Conservazione dell'Energia Meccanica (Teo. 4.7)

Se tutte le forze (interne ed esterne) agenti sul sistema sono conservative, l'energia meccanica si conserva:

$$E = T + U = \text{cost.}$$

Se sono presenti forze non conservative (es. forze di attrito), la variazione di energia meccanica è pari al lavoro di queste ultime: $\Delta T + \Delta U = W_{nc}$.

8 Urti

Definizione – Processo d'Urto (Def. 4.3)

Si dice **urto** un'interazione tra corpi caratterizzata da forze impulsive di grande intensità che agiscono per un intervallo di tempo Δt molto breve. Durante l'urto, l'impulso delle forze esterne è trascurabile rispetto a quello delle forze interne: il sistema può essere trattato come **isolato**, e la *quantità di moto totale si conserva sempre*.

Gli urti si classificano in tre categorie:

- **Elastici:** si conservano sia $\mathbf{P}_{\text{tot}}$ che l'energia cinetica totale.
- **Anelastici:** si conserva $\mathbf{P}_{\text{tot}}$; parte dell'energia cinetica si trasforma in altre forme di energia (calore, deformazione, suono).
- **Completamente anelastici:** caso limite in cui i corpi rimangono uniti dopo l'urto e si muovono con un'unica velocità finale.

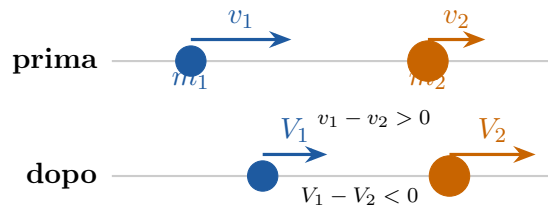
Osservazione – Forze impulsive e durata dell'urto

Il valore massimo delle forze interne durante l'urto può raggiungere 10^5 – 10^6 N per durate di poche decine di microsecondi (es. due sfere di acciaio da 2 cm con velocità relativa di 10 m/s). L'impulso delle forze esterne ordinarie (gravità, attrito) nell'intervallo Δt è del tutto trascurabile a confronto.

8.1 Urto Elastico Centrale Unidimensionale

Consideriamo due masse m_1, m_2 con velocità iniziali v_1, v_2 lungo una stessa retta (urto normale centrale, 1D). Le leggi di conservazione formano il sistema:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2. \end{cases}$$



In un urto elastico centrale la velocità relativa cambia segno: chi arriva più veloce prima dell'urto risulta più lento dopo l'interazione.

Proposizione – Inversione della Velocità Relativa (Prop. 4.1)

In un urto elastico, il modulo della velocità relativa si conserva e il segno si inverte:

$$v_1 - v_2 = -(V_1 - V_2).$$

Dimostrazione

Dall'energia cinetica: $m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2)$, ovvero $m_1(v_1 - V_1)(v_1 + V_1) = m_2(V_2 - v_2)(V_2 + v_2)$. Dalla quantità di moto: $m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2)$. Dividendo membro a membro (con $V_2 \neq v_2$): $v_1 + V_1 = V_2 + v_2$, da cui la tesi. $\square$

Proposizione – Urto Elastico con Bersaglio Fermo (Prop. 4.2)

Nel caso speciale $v_2 = 0$, introducendo il rapporto di massa $\gamma = m_1/m_2$, le velocità finali sono:

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_1, \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} v_1.$$

Dimostrazione

Dalla Prop. 8.1 con $v_2 = 0$: $V_2 = v_1 + V_1$. Sostituendo nella conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2(v_1 + V_1) \implies V_1(m_1 + m_2) = v_1(m_1 - m_2),$$

da cui $V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ e $V_2 = v_1 + V_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$. $\square$

Nota – Analisi per casi limite di γ (Lez. 13)

- $\gamma \rightarrow 0$ ($m_1 \ll m_2$, es. pallina da ping-pong contro palla da bowling): $V_1 \approx -v_1$ (rimbalzo elastico), $V_2 \approx 0$ (il bersaglio massivo resta quasi fermo).
- $\gamma = 1$ (masse uguali, es. biliardo): $V_1 = 0$, $V_2 = v_1$ (trasferimento *completo* di quantità di moto e di energia).
- $\gamma \rightarrow \infty$ ($m_1 \gg m_2$, es. camion contro bicicletta): $V_1 \approx v_1$ (il proiettile pesante non rallenta), $V_2 \approx 2v_1$.

Queste stesse curve — rapporto velocità di uscita vs. rapporto delle masse — si ritrovano identiche nello studio della riflessione e trasmissione delle onde meccaniche ed elettromagnetiche all'interfaccia tra due mezzi, sostituendo γ con il rapporto delle impedenze caratteristiche.

8.2 Urto Completamente Anelastico

I due corpi si fondono in un unico sistema di velocità finale $\mathbf{V}_{\text{fin}}$. La sola conservazione di $\mathbf{P}_{\text{tot}}$ basta:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{V}_{\text{fin}}.$$

Non esiste un'equazione supplementare sull'energia; l'energia cinetica dissipata è determinata *a posteriori* dalla differenza $\Delta E_{\text{diss}} = T_{\text{tot, prima}} - T_{\text{tot, dopo}}$.

Osservazione – Energia dissipata e CM

Dal teorema di König, T_{CM} non cambia durante l'urto (il CM è indisturbato dalle forze interne). L'energia dissipata corrisponde quindi all'energia cinetica interna (T_{rel}) prima dell'urto, cioè all'energia cinetica nel sistema di riferimento del CM.

8.3 Pendolo Balistico**Esercizio 4.1 – Pendolo Balistico**

Un proiettile di massa m e velocità orizzontale V_0 si conficca in un sacco di sabbia di massa M appeso a un filo di lunghezza ℓ . Il sistema oscilla e raggiunge un'altezza massima $h = \ell(1 - \cos \vartheta_{\text{max}})$. Determinare V_0 in funzione di ϑ_{max} .

Soluzione.

L'analisi si svolge in due fasi distinte.

Fase 1 — Urto completamente anelastico. La durata dell'urto è molto minore del periodo del pendolo: durante l'urto il sistema rimane quasi fermo e non vi sono forze esterne orizzontali rilevanti. Si conserva la quantità di moto orizzontale:

$$m V_0 = (m + M) V_{\text{fin}}.$$

Fase 2 — Oscillazione pendolare. Subito dopo l'urto agiscono solo forze conservative (tensione del filo e gravità); si conserva l'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}(m + M)V_{\text{fin}}^2 = (m + M)g h \implies V_{\text{fin}} = \sqrt{2g h}.$$

Risultato finale. Sostituendo V_{fin} nella relazione della Fase 1:

$$V_0 = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \vartheta_{\text{max}})}.$$

Misurando l'angolo massimo ϑ_{max} si risale direttamente alla velocità del proiettile.

Nota – Pendolo balistico con sbarra rigida (Lez. 13)

Se il sacco è appeso a una *sbarra rigida* incernierata, la reazione impulsiva del perno è una forza esterna ignota che invalida la conservazione della quantità di moto del sistema.

In questo caso si applica la conservazione del **momento angolare** rispetto al punto del vincolo: la reazione del perno ha braccio nullo rispetto a quel punto e non vi contribuisce. Si scrive:

$$m V_0 \cdot d = I_{\text{tot}} \omega,$$

dove d è la distanza del punto di impatto dal perno e I_{tot} è il momento d'inerzia totale rispetto al perno. Dalla successiva oscillazione si ricava ω (o l'altezza h raggiunta), e da lì V_0 .

9 Le Leggi di Keplero

Osservazione – Leggi di Keplero (1619)

Le tre leggi di Keplero descrivono il moto dei pianeti nel sistema solare e trovano giustificazione rigorosa nella meccanica newtoniana:

1. **Prima legge:** ogni pianeta descrive un'orbita ellittica con il Sole in uno dei due fuochi.
2. **Seconda legge:** la velocità areolare è costante, ovvero il raggio vettore Sole–pianeta spazza aree uguali in tempi uguali. Ciò è una diretta conseguenza della *conservazione del momento angolare*: la forza gravitazionale è centrale rispetto al Sole, quindi il suo momento è nullo e $\mathbf{L}$ si conserva. Quanto più il pianeta si avvicina al perielio, tanto maggiore è la sua velocità orbitale.
3. **Terza legge:** il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}.$$

Segue direttamente dall'equazione del moto con $F = GM_{\odot}m/r^2$.

Il centro di massa del sistema Sole–Terra dista circa 450 km dal centro del Sole (si può verificare con i dati $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$ kg, $M_{\oplus} \approx 6 \times 10^{24}$ kg, $d \approx 1,5 \times 10^{11}$ m): il CM è praticamente coincidente con il centro del Sole, e si può trattare il Sole come polo fisso della forza di attrazione.

10 Equazioni Cardinali dell'Equilibrio

Proposizione – Condizione Necessaria di Equilibrio (Prop. 4.3)

Condizione *necessaria* per l'equilibrio di un qualsiasi sistema di punti è che, per ogni scelta del polo O :

$$\sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad \sum_i \mathbf{M}_{i,\text{ext}}^{(O)} = \mathbf{0}.$$

Queste sono le **equazioni cardinali dell'equilibrio**. Per i corpi rigidi (Cap. 5) tali condizioni risultano anche *sufficienti*.