

Appunti di Fisica Classica

Capitolo 5: Meccanica dei corpi rigidi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Corpo rigido · Momento di inerzia · Teorema di Steiner · Pendolo composto
· Rotolamento

0 Indice

1	Definizione e modello di corpo rigido	1
2	Cinematica del corpo rigido	1
3	Dinamica del corpo rigido	2
4	Corpo girevole attorno a un asse fisso	2
4.1	Momento di inerzia assiale	2
4.2	Energia cinetica di rotazione e lavoro del momento	3
5	Calcolo del momento di inerzia	4
5.1	Sbarretta omogenea	4
5.2	Anello e disco omogenei	5
5.3	Altri momenti di inerzia notevoli	6
6	Teorema di Huygens-Steiner	6
7	Energia cinetica del corpo rigido libero	7
8	Pendolo composto	8
8.1	Equazione del moto	8
9	Statica dei corpi rigidi	9
9.1	Tipi di equilibrio	9
9.2	Sistemi equivalenti di forze	10
9.3	Leve	10
10	Rotolamento puro	10
10.1	Condizione cinematica di puro rotolamento	11
10.2	Avvio del rotolamento: dal disco che gira al disco che rotola	11
10.3	Evoluzione temporale	12
10.4	Conseguenze fisiche	12
10.5	Disco su piano inclinato	13
11	Esercizi svolti aggiuntivi	14

1 Definizione e modello di corpo rigido

Definizione – Corpo rigido (Def. 5.1)

Un **corpo rigido** è un sistema di punti materiali nel quale la distanza mutua tra ogni coppia di punti rimane costante nel tempo, indipendentemente dalle forze applicate.

Il corpo rigido è un modello ideale: non esistono in natura corpi perfettamente rigidi, ma molti solidi reali si deformano così poco da poter essere trattati come tali con ottima approssimazione. La configurazione nello spazio di un corpo rigido libero è descritta da **sei gradi di libertà**: tre coordinate del centro di massa e tre angoli che ne descrivono l'orientazione.

Definizione – Densità volumica

Per un corpo di massa M e volume V si definisce **densità volumica media** $\rho_m = M/V$. La densità locale è definita come

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV},$$

cosicché la massa totale è $M = \int_V \rho \, dV$.

2 Cinematica del corpo rigido

Il moto generale di un corpo rigido può sempre essere decomposto in:

- **Moto di traslazione pura:** tutti i punti hanno in ogni istante la stessa velocità vettoriale $\mathbf{v}(t)$.
- **Moto di rotazione pura attorno a un asse fisso:** i punti dell'asse sono fermi, gli altri descrivono cerchi con velocità $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare vettoriale e $\mathbf{r}$ il vettore dal punto sull'asse.
- **Moto rototraslatorio:** combinazione dei due precedenti.

Il risultato fondamentale della cinematica dei corpi rigidi è che la *distribuzione istantanea delle velocità* è quella di un moto rototraslatorio: fissato un qualsiasi punto Ω del corpo con velocità $\mathbf{v}_\Omega$, la velocità di ogni altro punto P è

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{\Omega P}.$$

Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ (velocità angolare istantanea) è libero e *non dipende* dalla scelta di Ω .

Osservazione – Asse istantaneo di rotazione

Nel caso del moto piano, $\boldsymbol{\omega}$ è perpendicolare al piano e l'asse istantaneo di rotazione è il luogo dei punti a velocità nulla in quell'istante. Per il rotolamento senza strisciamento il punto di contatto col piano è l'asse istantaneo.

3 Dinamica del corpo rigido

Per un corpo rigido valgono le due **equazioni cardinali** della meccanica dei sistemi (Cap. 4):

Teorema – Equazioni cardinali del corpo rigido

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_e, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_e,$$

dove $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_{CM}$ è la quantità di moto totale, $\mathbf{F}_e$ la risultante delle forze esterne, $\mathbf{L}$ il momento angolare rispetto al centro di massa e $\mathbf{M}_e$ il momento risultante delle forze esterne rispetto al centro di massa.

Le sei componenti scalari di queste equazioni sono esattamente sufficienti a determinare i sei gradi di libertà del moto.

Nota – Scelta del polo

Se il corpo possiede un punto fisso O conviene applicare la seconda equazione cardinale rispetto a O (le reazioni vincolari hanno momento nullo). La prima equazione serve invece a ricavare la reazione vincolare stessa.

4 Corpo girevole attorno a un asse fisso

4.1 Momento di inerzia assiale

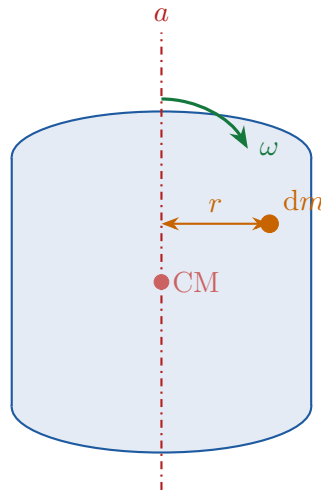
Quando il corpo può solo ruotare attorno a un asse fisso a , il numero di gradi di libertà si riduce a uno: l'angolo $\theta(t)$. La componente della seconda equazione cardinale lungo a diventa:

Definizione – Momento di inerzia assiale (Def. 5.2)

Il **momento di inerzia assiale** rispetto all'asse a è

$$I_a = \int_V \rho r^2 dV,$$

dove r è la distanza di ogni elemento di volume dall'asse a . Si misura in kg m^2 nel SI.



Ogni elemento dm a distanza r dall'asse a contribuisce con $r^2 dm$ al momento di inerzia.

Con questa definizione il momento angolare lungo l'asse è $L_a = I_a \omega$, e l'equazione del moto diventa:

Proposizione – Equazione della dinamica rotazionale (Prop. 5.1)

Per un corpo che ruota attorno a un asse fisso a :

$$M_a = I_a \ddot{\theta} = I_a \dot{\omega},$$

dove M_a è il momento risultante delle forze esterne rispetto ad a . Questa equazione è l'analogo rotazionale di $F = ma$.

Nota – Analogia traslazione–rotazione

La struttura dell'equazione $\tau = I\alpha$ specchia perfettamente $F = ma$: il momento delle forze τ sostituisce la forza F , il momento di inerzia I la massa m , e l'accelerazione angolare α l'accelerazione lineare a . Il momento di inerzia misura quindi la *resistenza alla variazione dello stato di rotazione*, proprio come la massa misura la resistenza alla variazione dello stato di traslazione.

4.2 Energia cinetica di rotazione e lavoro del momento

L'energia cinetica di un corpo in rotazione si ottiene sommando $\frac{1}{2}v^2 dm$ per ogni elemento:

Proposizione – Energia cinetica di rotazione (Prop. 5.2)

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_a \omega^2.$$

Dimostrazione

Ogni elemento di massa dm a distanza r dall'asse si muove con velocità tangenziale $v = \omega r$, quindi:

$$T = \int \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} I_a \omega^2.$$

□

Proposizione – Lavoro del momento (Prop. 5.3)

Il lavoro elementare compiuto da una forza $\mathbf{F}$ applicata a un punto che si sposta di $d\mathbf{s}$ è:

$$dW = M_a d\theta,$$

dove $M_a = Fr \sin \alpha$ è il momento rispetto all'asse e $d\theta$ è lo spostamento angolare. Integrando:

$$W_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_a(\theta) d\theta.$$

Nota – Forze interne e rigidità

Le forze interne in un sistema rigido compiono complessivamente *lavoro nullo*: per qualsiasi coppia di punti gli spostamenti proiettati sulla congiungente sono uguali e contrari, in modo da mantenere inalterate le distanze.

5 Calcolo del momento di inerzia

5.1 Sbarretta omogenea

Nota – Scelta dell'asse e densità lineare

Per calcolare I si integra $r^2 dm$ usando la densità lineare $\lambda = m/L$ (massa per unità di lunghezza, costante per un corpo omogeneo), così che $dm = \lambda dr$.

Proposizione – Sbarretta: asse all'estremo (Prop. 5.4)

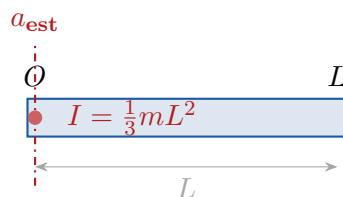
Per una sbarretta omogenea di massa m e lunghezza L , con l'asse perpendicolare passante per un estremo:

$$I_{\text{estremo}} = \frac{1}{3}mL^2.$$

Dimostrazione

$$I = \int_0^L r^2 \lambda dr = \lambda \frac{L^3}{3} = \frac{m}{L} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{mL^2}{3}.$$

□



Proposizione – Sbarretta: asse al centro (Prop. 5.5)

Per l'asse passante per il centro della sbarretta:

$$I_{\text{centro}} = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{4}I_{\text{estremo}}.$$

Dimostrazione

Le masse si distribuiscono da $-L/2$ a $+L/2$:

$$I = \lambda \int_{-L/2}^{+L/2} r^2 dr = \lambda \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L^3}{8} = \frac{mL^2}{12}.$$

□

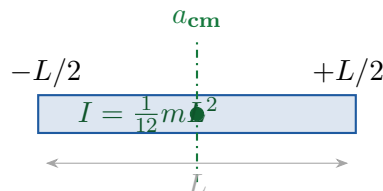
Nota – Confronto delle accelerazioni angolari

Applicando la stessa forza F all'estremo della sbarretta nei due casi, i momenti applicati sono $\tau_1 = FL$ (asse all'estremo) e $\tau_2 = FL/2$ (asse al centro). Le accelerazioni angolari risultano:

$$\alpha_1 = \frac{FL}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3F}{mL}, \quad \alpha_2 = \frac{FL/2}{\frac{1}{12}mL^2} = \frac{6F}{mL}.$$

$\alpha_2 = 2\alpha_1$: il fattore non è 4 (come si potrebbe pensare considerando solo il rapporto degli I), perché cambia anche il momento della forza.

5.2 Anello e disco omogenei



Proposizione – Anello sottile (Prop. 5.6)

Per un anello sottile di massa m e raggio R , con asse perpendicolare al piano passante per il centro:

$$I_{\text{anello}} = mR^2.$$

Dimostrazione

Tutti gli elementi di massa si trovano alla stessa distanza R : $I = R^2 \int dm = mR^2$.

□

Proposizione – Disco omogeneo (Prop. 5.7)

Per un disco omogeneo di massa m e raggio R , con asse perpendicolare al piano

passante per il centro:

$$I_{\text{disco}} = \frac{1}{2} m R^2.$$

Dimostrazione

La densità superficiale è $\sigma = m/(\pi R^2)$. Si integra per anelli concentrici di area $dS = 2\pi r \, dr$:

$$I = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r \, dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 \, dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{\pi\sigma R^4}{2}.$$

Sostituendo $\sigma = m/(\pi R^2)$: $I = \frac{1}{2} m R^2$. □

Osservazione – Confronto anello e disco

A parità di massa e raggio, $I_{\text{disco}} = \frac{1}{2} I_{\text{anello}}$: nel disco parte della massa è più vicina all'asse rispetto all'anello, dove tutta la massa è concentrata alla distanza massima R .

5.3 Altri momenti di inerzia notevoli

Osservazione – Tabella dei momenti di inerzia comuni

Corpo	Asse	I
Sbarretta di lunghezza L	$\perp$, per un estremo	$\frac{1}{3} m L^2$
Sbarretta di lunghezza L	$\perp$, per il centro	$\frac{1}{12} m L^2$
Anello di raggio R	$\perp$ per il centro	$m R^2$
Disco di raggio R	$\perp$ per il centro	$\frac{1}{2} m R^2$
Sfera piena di raggio R	per un diametro	$\frac{2}{5} m R^2$
Guscio sferico di raggio R	per un diametro	$\frac{2}{3} m R^2$
Parallelepipedo ($a \times b$)	per il centro, $\parallel c$	$\frac{m(a^2+b^2)}{12}$

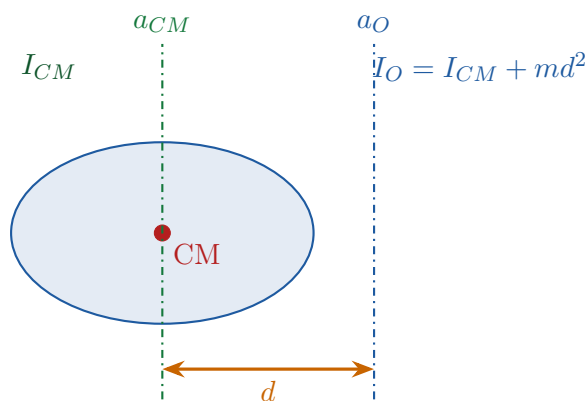
6 Teorema di Huygens-Steiner

Teorema – Huygens-Steiner (Teo. 5.1)

Il momento di inerzia rispetto a un asse a è legato al momento di inerzia rispetto all'asse parallelo passante per il centro di massa dalla relazione:

$$I_O = I_{CM} + m d^2,$$

dove m è la massa totale e d è la distanza tra i due assi paralleli.



Gli assi a_{CM} e a_O sono paralleli, separati da d . Il termine md^2 è il contributo aggiuntivo dello spostamento.

Osservazione – Interpretazione del teorema di Steiner

Il termine md^2 è il momento di inerzia di una massa puntiforme m concentrata nel centro di massa, rispetto all'asse O . Intuitivamente: ruotando attorno a O , il corpo si comporta come se *tutta* la sua massa fosse concentrata nel CM (contributo md^2) più il contributo della rotazione del corpo attorno al proprio CM (contributo I_{CM}).

Nota – Asse di minimo momento di inerzia

Per il teorema di Steiner, $I_O = I_{CM} + md^2 \geq I_{CM}$ con l'uguale solo quando $d = 0$. L'asse passante per il centro di massa è quindi quello che minimizza il momento di inerzia tra tutti gli assi paralleli.

7 Energia cinetica del corpo rigido libero

Il moto del corpo rigido libero si decompone in traslazione del CM più rotazione attorno a un asse per il CM.

Teorema – Energia cinetica totale (Teo. 5.2)

$$T = \frac{1}{2}m v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM} \omega^2.$$

Il primo termine è l'energia cinetica di traslazione del CM; il secondo è l'energia cinetica di rotazione attorno al CM.

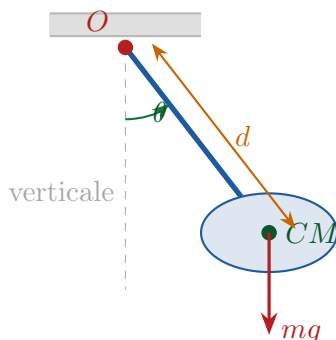
Osservazione – Quantità di moto e momento angolare

Le rotazioni attorno all'asse del CM danno un contributo notevole all'energia cinetica ma contributo *nullo* alla quantità di moto: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_{CM}$ non include la rotazione.

8 Pendolo composto

Definizione – Pendolo composto (Def. 5.3)

Un **pendolo composto** (o pendolo fisico) è un corpo rigido di forma qualsiasi, infilzato su un asse orizzontale fisso O (non passante per il CM), libero di oscillare nel piano verticale sotto l'azione della gravità. Il CM si trova a distanza d da O .



8.1 Equazione del moto

Proposizione – Equazione del pendolo composto (Prop. 5.8)

Detto θ l'angolo tra la congiungente O - CM e la verticale, applicando la seconda equazione cardinale rispetto all'asse O (dove la reazione vincolare ha momento nullo):

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_O} \sin \theta = 0.$$

Per piccole oscillazioni ($\sin \theta \approx \theta$) il moto è armonico con pulsazione e periodo:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_O}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgd}}.$$

Osservazione – Lunghezza equivalente

Il pendolo composto è equivalente a un pendolo semplice di lunghezza

$$L_{\text{eq}} = \frac{I_O}{md}.$$

Con il teorema di Steiner: $I_O = I_{CM} + md^2$, da cui

$$T(d) = 2\pi \sqrt{\frac{I_{CM} + md^2}{mgd}}.$$

Nota – Andamento del periodo in funzione di d

Il professore analizza l'andamento qualitativo di $T(d)$:

- Per $d \rightarrow 0$: l'asse si avvicina al CM, $T \propto 1/\sqrt{d}$ e il periodo *diverge*. Il corpo resta in equilibrio indifferente, non c'è momento di richiamo.
- Per $d \rightarrow \infty$: I_{CM} diventa trascurabile e $T \propto \sqrt{d}$, il periodo cresce.
- Esiste un valore d^* che *minimizza* T : si trova imponendo $dT/dd = 0$, ottenendo $d^* = \sqrt{I_{CM}/m}$.

Esercizio 5.2 — Pendolo fisico (periodo)

Un corpo rigido può oscillare senza attrito attorno a un asse fisso orizzontale O , non passante per il CM G (distanza $OG = d$). Trovare il periodo delle piccole oscillazioni.

Soluzione. Applicando la seconda equazione cardinale rispetto ad O con $M_a = -mgd \sin \theta$ si ricava $\ddot{\theta} = -(mgd/I_O) \theta$ (per piccoli θ), ossia moto armonico con

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgd}}.$$

Per $d \rightarrow 0$: $T \rightarrow \infty$ (la forza peso non ha più momento e il corpo rimane nella posizione iniziale).

9 Statica dei corpi rigidi

Teorema – Condizioni di equilibrio statico (Teo. 5.3)

Un corpo rigido è in equilibrio se e solo se:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_e = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{M}_e$ è il momento delle forze esterne rispetto a un polo arbitrario (o al CM).

Nota – Tecnica per la scelta del polo

Per eliminare le reazioni vincolari incognite dai calcoli dei momenti, conviene scegliere come polo il punto di applicazione della reazione che si vuole ignorare: il suo momento è zero, e l'equazione dei momenti coinvolge solo le forze note.

9.1 Tipi di equilibrio

Per un corpo ad asse fisso orizzontale soggetto solo alla gravità, l'equilibrio si ha quando la verticale per il CM interseca l'asse O :

- **Stabile:** CM sotto O — la perturbazione genera una coppia di richiamo verso la posizione di equilibrio (minimo di energia potenziale).

- **Instabile:** CM sopra O — la perturbazione genera una coppia che allontana dalla posizione di equilibrio (massimo di energia).
- **Indifferente:** CM sull'asse O — equilibrio per qualsiasi θ .

9.2 Sistemi equivalenti di forze

Osservazione – Riduzione di una sollecitazione

Qualunque sistema di forze applicate a un corpo rigido può essere ridotto a:

1. Una **forza risultante** $\mathbf{F}_e$ applicata in un punto arbitrario, più
2. una **coppia** di momento $\mathbf{M}_e$.

Due sistemi di forze sono **equivalenti** se hanno stessa $\mathbf{F}_e$ e stesso $\mathbf{M}_e$.

Definizione – Coppia di forze (Def. 5.4)

Una **coppia** è formata da due forze parallele di uguale modulo e verso opposto. La risultante è nulla, ma il momento intrinseco $\tau = F d$ (con d distanza tra le rette d'azione) è *lo stesso rispetto a qualsiasi polo*.

Nota – Forze parallele concordi e discordi

Due forze parallele concordi F_1 e F_2 si riducono a $F = F_1 + F_2$, applicata nel loro *centro*, punto che divide il segmento che le unisce in proporzione inversa alle intensità: $d_1/d_2 = F_2/F_1$. Se le forze sono discordi ma di diversa intensità, la risultante ha intensità $|F_1 - F_2|$ ed è applicata esternamente al segmento. Se $F_1 = F_2$ e i versi sono opposti: coppia pura (risultante nulla).

9.3 Leve

Osservazione – La leva come corpo rigido a un grado di libertà

Una **leva** è un corpo rigido ad asse fisso (fulcro) soggetto a due forze che generano momenti opposti. La condizione di equilibrio è $M_1 = M_2$, ovvero:

$$R d_1 = P d_2,$$

dove R è la resistenza, P la potenza e d_1 , d_2 i rispettivi bracci. La leva amplifica la forza in proporzione inversa ai bracci.

10 Rotolamento puro

10.1 Condizione cinematica di puro rotolamento

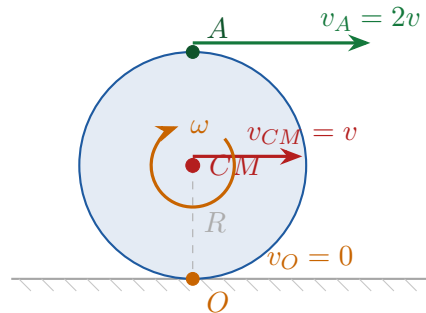
Definizione – Puro rotolamento (Def. 5.5)

Un corpo cilindrico di raggio R si trova in condizione di **puro rotolamento** (rotolamento senza strisciamento) quando il punto di contatto con il piano è istantaneamente fermo, ovvero:

$$v_{CM} = \omega R, \quad a_{CM} = \dot{\omega} R.$$

Nota – Asse istantaneo di rotazione nel puro rotolamento

In condizioni di puro rotolamento l'asse istantaneo di rotazione coincide con la linea di contatto corpo-piano. La velocità di un punto del corpo è $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}$, dove O è il punto di contatto. Il CM si trova a distanza R , quindi $v_{CM} = \omega R$; il punto diametralmente opposto al contatto ha velocità $2\omega R$ verso destra.



10.2 Avvio del rotolamento: dal disco che gira al disco che rotola

Nota – Esperimento mentale: disco in rotazione che tocca il piano

Il professore considera un disco omogeneo ($m, R, I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2$) inizialmente in rotazione con ω_0 e $v_{CM}(0) = 0$, abbassato su un piano orizzontale. Il punto di contatto striscia verso sinistra con velocità $\omega_0 R$; compare attrito dinamico $f_d = \mu_d mg$ verso destra. Le due equazioni della dinamica sono:

$$\text{(traslazione CM):} \quad f_d = m a_{CM} \implies a_{CM} = \mu_d g,$$

$$\text{(rotazione attorno al CM):} \quad f_d R = I_{CM} |\dot{\omega}| \implies |\dot{\omega}| = \frac{2\mu_d g}{R}.$$

Notare che l'attrito dinamico *accelera* il CM (verso destra) e *decelera* ω (l'accelerazione angolare è opposta a ω_0).

10.3 Evoluzione temporale

Proposizione – Leggi orarie nella fase di strisciamento (Prop. 5.9)

Con condizioni iniziali $v_{CM}(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0$:

$$v_{CM}(t) = \mu_d g t, \quad \omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu_d g}{R} t.$$

La condizione di puro rotolamento $v_{CM} = \omega R$ si raggiunge all'istante:

$$t^* = \frac{\omega_0 R}{3\mu_d g}.$$

Dimostrazione

Si impone $\mu_d g t^* = (\omega_0 - \frac{2\mu_d g}{R} t^*) R$ e si risolve per t^* :

$$\mu_d g t^* + \frac{2\mu_d g}{R} t^* R = \omega_0 R \implies 3\mu_d g t^* = \omega_0 R \implies t^* = \frac{\omega_0 R}{3\mu_d g}.$$

□

10.4 Conseguenze fisiche

Nota – Cosa succede al raggiungimento del puro rotolamento

Nell'istante t^* il punto di contatto è fermo rispetto al piano. L'attrito *dinamico* richiede strisciamento per esistere, quindi **cessa istantaneamente**. L'attrito statico che subentra vale esattamente zero (non c'è nessuna forza orizzontale che tenti di far scorrere il punto di contatto). Con l'azzeramento dell'attrito, spariscono sia a_{CM} sia $\dot{\omega}$: il disco prosegue indefinitamente con $v_{CM}^* = \omega^* R$ e ω^* costanti. Questo è il modo “naturale” del rotolamento.

Nota – Applicazioni tecnologiche: ABS e controllo di trazione

Il professore cita due esempi:

- **Trazione su ghiaccio:** μ_d basso $\implies \omega R \gg v_{CM}$ (ruote che slittano). Il controllo di trazione riduce ω per ripristinare $v_{CM} \approx \omega R$.
- **Frenata ABS:** frenata bloccata $\implies \omega = 0$, $v_{CM} > 0$ (ruota trascinata con attrito dinamico, inefficiente). L'ABS rilascia periodicamente la frenata per mantenere $\omega R \approx v_{CM}$, dove l'attrito è statico (più efficace del dinamico).

10.5 Disco su piano inclinato

Esercizio 5.5 — Disco su piano inclinato

Un disco omogeneo (m, r) parte da fermo e rotola senza strisciare su un piano inclinato di angolo θ . Trovare l'accelerazione del CM e la condizione minima sull'attrito.

Soluzione. Siano A la forza di attrito (diretta su per il piano, verso l'alto) e a l'accelerazione del CM (verso il basso lungo il piano). Le equazioni cardinali lungo il piano e attorno al CM sono:

$$mg \sin \theta - A = ma, \quad Ar = I_{CM} \dot{\omega} = \frac{1}{2}mr^2 \frac{a}{r}.$$

Dalla seconda: $A = \frac{1}{2}ma$. Sostituendo nella prima:

$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta.$$

Questo è $2/3$ dell'accelerazione di scivolamento senza attrito ($g \sin \theta$): parte dell'energia va in rotazione. La forza di attrito richiesta è $A = \frac{1}{3}mg \sin \theta$; poiché $A \leq \mu_s mg \cos \theta$, la condizione affinché non ci sia strisciamento è:

$$\mu_s \geq \frac{1}{3} \tan \theta.$$

Approccio energetico. Si può ricavare v_{CM} dopo una discesa di quota h usando la conservazione dell'energia meccanica ($T_{\text{rot}} + T_{\text{trasl}} = mgh$):

$$\frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \left(\frac{v_{CM}}{r}\right)^2 = mgh \implies v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

(Per confronto: scivolamento senza attrito $v = \sqrt{2gh}$.)

Nota – Ruolo dell'attrito nel rotolamento su piano inclinato

Senza attrito ($\mu = 0$) il disco non può acquisire velocità angolare: la componente della forza peso lungo il piano ($mg \sin \theta$) produce solo traslazione. Per generare un'accelerazione angolare serve una forza con momento rispetto al CM: questa è l'attrito statico. Paradossalmente, l'attrito *statico* non compie lavoro (il punto di contatto è fermo), ma svolge un ruolo fondamentale nel trasferire energia dalla traslazione alla rotazione.

Esercizio 5.4 — Minimo attrito per puro rotolamento

Un cilindro omogeneo di massa M e raggio r è appoggiato su un piano. Una forza costante F (parallela al piano) è applicata al centro dell'asse. Trovare il minimo μ_s perché il cilindro rotoli senza strisciare.

Soluzione. In assenza di attrito il momento delle forze rispetto al CM è nullo e il cilindro trasla senza ruotare. L'attrito A (opposto a F) fornisce il momento

necessario. Le equazioni sono:

$$F - A = M a_{CM}, \quad A r = \frac{1}{2} M r^2 \frac{a_{CM}}{r}, \quad M g = R_N.$$

Dalla seconda: $A = \frac{1}{2} M a_{CM}$. Dalla prima: $a_{CM} = \frac{2F}{3M}$, quindi $A = \frac{F}{3}$. La condizione $A \leq \mu_s R_N = \mu_s M g$ dà:

$$\mu_s \geq \frac{F}{3Mg}.$$

11 Esercizi svolti aggiuntivi

Esercizio 5.1 — Piattaforma rotante con due persone

Due persone di massa m_1 e m_2 si trovano su una piattaforma circolare di massa trascurabile che ruota senza attrito con ω_1 attorno all'asse verticale centrale. Inizialmente sono a distanza d dal centro. Trovare ω_2 quando si spostano a $d/2$ e $d/4$ rispettivamente.

Soluzione. Non ci sono momenti esterni rispetto all'asse: il momento angolare si conserva. Inizialmente $b_1 = (m_1 + m_2) d^2 \omega_1$; dopo lo spostamento:

$$b_2 = \left[m_1 \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{d}{4} \right)^2 \right] \omega_2 = \frac{d^2}{16} (4m_1 + m_2) \omega_2.$$

Imponendo $b_1 = b_2$:

$$\omega_2 = 16 \frac{m_1 + m_2}{4m_1 + m_2} \omega_1.$$

Casi limite: se $m_1 \gg m_2$, $\omega_2 \approx 4\omega_1$; se $m_2 \gg m_1$, $\omega_2 \approx 16\omega_1$.

Esercizio 5.3 — Puleggia di Atwood con disco

Un disco (puleggia) omogeneo di raggio r e massa m può ruotare senza attrito. Su di esso è avvolto un filo che porta due masse $m_1 > m_2$. Trovare l'accelerazione delle masse.

Soluzione. Siano τ_1 , τ_2 le tensioni e a l'accelerazione (positiva verso il basso per m_1). La condizione cinematica è $a = r\dot{\omega}$. Le equazioni del moto sono:

$$m_1 a = m_1 g - \tau_1, \quad -m_2 a = m_2 g - \tau_2, \quad (\tau_1 - \tau_2) r = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a}{r}.$$

Sommando le prime due: $(m_1 - m_2)g - (\tau_1 - \tau_2) = (m_1 + m_2)a$. Dalla terza: $\tau_1 - \tau_2 = \frac{1}{2} m a$. Quindi:

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m}.$$

Se la massa della puleggia è trascurabile: $a \rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$.

Esercizio 5.2 — Sfera su piano: coefficiente di attrito dinamico

Una sfera d'acciaio ($I = \frac{2}{5}mR^2$) è a riposo su un piano orizzontale. Riceve un impulso centrale che le conferisce $v_0 = 0,8 \text{ m s}^{-1}$ al CM, con $\omega(0) = 0$. Il puro rotolamento si raggiunge a $t^* = 0,5 \text{ s}$. Trovare μ_d .

Soluzione. L'attrito dinamico decelera il CM e accelera la rotazione:

$$a_{CM} = -\mu_d g, \quad \dot{\omega} = \frac{\mu_d g R}{\frac{2}{5}mR^2/m} = \frac{5\mu_d g}{2R}.$$

Le leggi orarie: $v_{CM}(t) = v_0 - \mu_d g t$ e $\omega(t) = \frac{5\mu_d g}{2R} t$. La condizione $v_{CM}(t^*) = \omega(t^*)R$ dà:

$$v_0 - \mu_d g t^* = \frac{5\mu_d g}{2} t^* \implies v_0 = \frac{7}{2} \mu_d g t^* \implies \mu_d = \frac{2v_0}{7g t^*} = \frac{2 \times 0,8}{7 \times 9,8 \times 0,5} \approx 0,047.$$