

Appunti di Fisica Classica

Capitolo 7: Meccanica dei fluidi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Fluidi ideali · Fluidostatica · Principio di Pascal · Principio di Archimede ·
Equazione di Bernoulli

0 Indice

1	Introduzione: fluidi ideali	1
2	Pressione in un punto di un fluido	1
2.1	Indipendenza della pressione dall'orientamento della superficie	2
3	Equazioni della statica dei fluidi	2
3.1	Equazione fondamentale (equazione di Eulero per la statica)	2
3.2	Legge di Stevino	3
3.3	Misura della pressione	4
3.4	Atmosfera isoterma: formula barometrica	5
4	Principio di Pascal	5
5	Principio di Archimede	6
5.1	Condizioni di galleggiamento	6
5.2	Stabilità dei natanti: metacentro	7
6	Dinamica dei fluidi	7
6.1	Campo di velocità e moto stazionario	7
6.2	Equazione di continuità	8
7	Equazione di Bernoulli	9
7.1	Applicazioni del teorema di Bernoulli	10
7.1.1	Legge di Torricelli	10
7.1.2	Effetto Venturi e portanza	10
8	Esercizi dal testo	11

1 Introduzione: fluidi ideali

Un **fluido** è uno stato della materia in cui le molecole sono legate in modo molto meno rigido rispetto ai solidi, permettendo scorrimento e cambio di forma. Questa categoria comprende tanto i liquidi quanto i gas.

Nell'ambito di questo capitolo adottiamo il modello di **fluido ideale**, caratterizzato da due proprietà:

1. **Incomprimibilità:** la densità ρ rimane costante, indipendentemente dalla pressione applicata. I liquidi reali si discostano poco da questa approssimazione; anche un gas può essere trattato come incomprimibile nel caso di flusso stazionario a velocità molto inferiori a quella del suono (ad esempio il vento attorno a un profilo alare in regime subsonico).
2. **Assenza di viscosità:** non esistono sforzi di taglio tra strati di fluido contigui in moto relativo. La viscosità — analoga dell'attrito tra solidi — è responsabile della dissipazione di energia; nel fluido ideale viene trascurata.

Osservazione – Liquidi reali e fluido ideale

I liquidi comuni, come l'acqua, sono ottimi esempi pratici di fluido quasi ideale: la loro comprimibilità è trascurabile nelle condizioni ordinarie e la viscosità è bassa. I gas ideali richiedono condizioni più restrittive e verranno analizzati con gli strumenti della termodinamica quando la comprimibilità non è trascurabile.

2 Pressione in un punto di un fluido

Quando un fluido è contenuto in un recipiente esercita forze sulle pareti; per il principio di azione e reazione, il recipiente esercita forze di eguale modulo e verso opposto sul fluido. Queste forze non si applicano a un punto ma sono distribuite sulle superfici di contatto. Analogamente, in ogni punto interno al fluido si possono pensare due porzioni di fluido che si scambiano forze attraverso una superficie ideale di separazione.

Definizione – Pressione (Def. 7.1)

Si consideri in un punto P del fluido un elemento di superficie ΔS con normale uscente $\hat{n}$. La forza $\Delta \mathbf{F}$ che il fluido dalla parte “1” esercita sul fluido dalla parte “2” può essere decomposta in una componente *normale* $\Delta F_n = \Delta \mathbf{F} \cdot \hat{n}$ e una componente *tangenziale*. In un fluido ideale (o in qualsiasi fluido in equilibrio) la componente tangenziale è nulla, e si definisce la **pressione** nel punto P come:

$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}$$

La pressione è una grandezza *scalare* e si misura in pascal: $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.

Osservazione – Forze di superficie e forze di volume

Nel fluido si distinguono due tipi di forze:

- **Forze di superficie:** si scambiano tra porzioni di fluido (o tra fluido e parete)

attraverso la superficie di contatto; si manifestano tramite la pressione.

- **Forze di volume:** agiscono su tutta la massa del fluido indipendentemente da come si tracci una superficie ideale. L'esempio principale è la forza di gravità $d\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g} dV$; in sistemi non inerziali compaiono anche forze apparenti come quella centrifuga.

2.1 Indipendenza della pressione dall'orientamento della superficie

La definizione data sembra far dipendere la pressione dall'orientamento della superficie ΔS ; si dimostra che in realtà la pressione è una proprietà intrinseca del *punto*, indipendente dall'orientamento.

Proposizione – Pressione scalare di punto (Prop. 7.1)

In un fluido ideale in equilibrio la pressione in un punto P è indipendente dall'orientamento della superficie su cui viene calcolata: è quindi ben definita come campo scalare $P(\mathbf{r})$.

Dimostrazione

Si costruisce un elemento di volume a cuneo: una faccia di area ΔS inclinata di un angolo α rispetto alla verticale, una faccia di area $\Delta S'$ normale all'asse x , e superfici laterali i cui contributi in direzione x si annullano a coppie.

La forza di superficie sulla faccia inclinata ha modulo $P \Delta S$ e proiezione lungo x pari a $P \Delta S \cos \alpha$; quella sulla faccia normale ha modulo $P' \Delta S'$ (diretta in verso opposto). La forza di volume in direzione x è $\rho \Delta S' \Delta x G_x$, infinitesimo di ordine superiore rispetto ai termini di superficie. Imponendo l'equilibrio e passando al limite $\Delta x \rightarrow 0$:

$$P \Delta S \cos \alpha - P' \Delta S' = 0$$

Poiché geometricamente $\Delta S \cos \alpha = \Delta S'$, si ottiene $P = P'$. L'angolo α era arbitrario, quindi la pressione non dipende dall'orientamento. $\square$

Nota – Confronto con la meccanica del punto e del corpo rigido

Nel caso del punto materiale o del corpo rigido avevamo un punto di applicazione ben definito per le forze. Nel fluido, che è continuo e deformabile, questo concetto non ha significato diretto: la forza si distribuisce su una superficie, e la grandezza fisica adeguata è la pressione, definita punto per punto. Non si applica una forza a un fluido, bensì una pressione su una superficie.

3 Equazioni della statica dei fluidi

3.1 Equazione fondamentale (equazione di Eulero per la statica)

Per ricavare le equazioni di equilibrio si considera un elemento di fluido di volume $dV = dx dy dz$. Nella direzione x , la pressione sulla faccia sinistra è $P(x_0)$ e quella sulla faccia

destra è $P(x_0 + dx) = P(x_0) + \frac{\partial P}{\partial x} dx$. La condizione di equilibrio in x , sommando forze di superficie e di volume, diventa:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} dV + \rho G_x dV = 0 \implies \frac{\partial P}{\partial x} = \rho G_x$$

Ripetendo per y e z e raccogliendo in forma vettoriale:

Teorema – Equazione fondamentale della statica dei fluidi

$$\nabla P = \rho \mathbf{G}$$

dove $\mathbf{G}$ è il vettore delle forze di volume per unità di massa. La variazione spaziale della pressione è determinata esclusivamente dalle forze di volume.

Nota – Forze di volume conservative e potenziale

Se le forze di volume sono conservative esiste un potenziale per unità di massa U tale che $\mathbf{G} = -\nabla U$. Sostituendo:

$$\nabla P = -\rho \nabla U \implies P = -\rho U + \text{cost}$$

Per fluido omogeneo ($\rho = \text{cost}$) le superfici a pressione costante (isobare) coincidono con le superfici equipotenziali ($U = \text{cost}$).

3.2 Legge di Stevino

Proposizione – Legge di Stevino (Prop. 7.2)

In un fluido omogeneo in equilibrio sottoposto alla sola forza di gravità, con asse z verticale verso l'alto:

$$P = P_0 + \rho g h$$

dove $h = z_0 - z$ è la profondità rispetto alla superficie libera (quota z_0 , pressione P_0). La pressione dipende solo dalla profondità, non dalla forma del recipiente.

Dimostrazione

Applicando il teorema 3.1 con $\mathbf{G} = -g \hat{z}$ e $U = gz$:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \implies P(z) = -\rho g z + \text{cost}$$

Ponendo $P = P_0$ a $z = z_0$ e $h = z_0 - z$ si ottiene la tesi. $\square$

Osservazione – Superfici isobare e superficie libera

Dalla legge di Stevino segue che in un fluido omogeneo in equilibrio le superfici a pressione costante sono piani orizzontali. In particolare la superficie libera di un liquido è orizzontale: se fosse inclinata, un elemento a quote diverse subirebbe pressioni diverse e quindi una forza netta, che lo metterebbe in moto, contraddicendo l'ipotesi di equilibrio.

Lo stesso principio si applica ai vasi comunicanti: in un recipiente qualunque la pressione è la stessa in tutti i punti allo stesso livello, indipendentemente dalla forma del recipiente.

Osservazione – Paradosso idrostatico

La legge di Stevino porta a un risultato apparentemente sorprendente: tre recipienti con basi dello stesso lato L ma forma diversa (cilindrico, espanso verso l'alto, stretto verso l'alto) riempiti allo stesso livello h di liquido esercitano tutti la stessa forza sul fondo,

$$F_{\text{fondo}} = (P_0 + \rho g h) L^2$$

indipendentemente dalla quantità di liquido effettivamente contenuta. La spiegazione risiede nelle forze che le pareti inclinate esercitano verticalmente sul fluido: dove il recipiente si allarga verso l'alto le pareti spingono il fluido verso il basso (aumentando la forza sul fondo rispetto al peso del liquido contenuto); dove si restringe avviene il contrario.

3.3 Misura della pressione

Pressione atmosferica e barometro di Torricelli. Si riempie un tubo lungo circa 80 cm di mercurio, poi lo si rovescia con l'apertura immersa in una vaschetta di mercurio, impedendo l'ingresso di aria. Il mercurio scende e al di sopra si crea il *vuoto torricelliano* (pressione trascurabile). All'equilibrio, la pressione atmosferica P_0 sostiene la colonna di mercurio di altezza $h \approx 76$ cm:

$$P_0 = \rho_{Hg} g h \approx 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

Poiché il mercurio è circa 13,6 volte più denso dell'acqua, usare acqua al posto del mercurio richiederebbe una colonna di circa 10 m, il che spiega il limite delle pompe aspiranti che creano vuoto: non possono sollevare l'acqua oltre 10 m.

Nota – Manometro a tubo aperto e a tubo chiuso

Il manometro è uno strumento per misurare la pressione di un gas basato sulla legge di Stevino. Se il tubo a U è aperto all'atmosfera, la pressione del gas è:

$$P_{\text{gas}} = P_0 + \rho_{liq} g h$$

Se il tubo è chiuso (con il ramo in comunicazione solo col gas):

$$P_{\text{gas}} = \rho_{liq} g h$$

dove h è il dislivello del liquido manometrico e ρ_{liq} la sua densità.

3.4 Atmosfera isoterma: formula barometrica

Osservazione – Pressione atmosferica con densità variabile

Per i gas la densità non è costante: dipende dalla pressione. Nel modello isoterma si assume $T = \text{cost}$, che impone la proporzionalità $\rho/\rho_0 = P/P_0$. Sostituendo nell'equazione $dP/dz = -\rho g$:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\rho_0}{P_0} g P \implies P(z) = P_0 e^{-z/H}, \quad H = \frac{P_0}{\rho_0 g} \approx 8 \text{ km}$$

La lunghezza caratteristica H è la quota alla quale la pressione si riduce al fattore $1/e \approx 0,37$ del valore al suolo. Anche la densità segue lo stesso profilo esponenziale: $\rho(z) = \rho_0 e^{-z/H}$.

4 Principio di Pascal

Teorema – Principio di Pascal

In un fluido incompressibile in equilibrio, un aumento di pressione applicato in un qualsiasi punto si trasmette *inalterato* istantaneamente a ogni punto del fluido.

Dimostrazione

Segue direttamente dalla legge di Stevino (Prop. 3.2): la differenza di pressione tra due punti dipende soltanto dalla differenza di quota e dalla densità, che rimane costante per ipotesi di incompressibilità. Se la pressione in uno dei due punti aumenta di ΔP , la differenza deve rimanere la stessa, quindi anche il secondo punto sperimenta lo stesso aumento ΔP . $\square$

Nota – Pressa idraulica e freni idraulici

Il principio di Pascal è alla base della pressa idraulica. Un contenitore contiene un fluido e ha due pistoni di sezioni S_1 e S_2 . Applicando una forza F_1 al pistone 1, si genera un aumento di pressione $\Delta P = F_1/S_1$ che si trasmette al pistone 2:

$$F_2 = \Delta P \cdot S_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

Se $S_2 \gg S_1$, con una piccola forza si produce una forza molto maggiore. La conservazione dell'energia non è violata: il pistone piccolo si abbassa di molto, quello grande si sposta di poco, e i lavori $F_1 s_1 = F_2 s_2$ sono uguali. Nei freni idraulici si sfrutta questo principio per moltiplicare la forza esercitata dal piede sul pedale e premere le pastiglie sulle ruote.

5 Principio di Archimede

Teorema – Principio di Archimede

Un corpo immerso in un fluido pesante in equilibrio è soggetto a una forza verticale diretta verso l'alto (**spinta di Archimede**), la cui intensità è pari al peso del fluido spostato:

$$F_A = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{immerso}} g$$

La spinta è applicata nel baricentro del volume di fluido spostato, detto **centro di spinta**.

Dimostrazione

Si considera un corpo completamente immerso, con la faccia superiore a profondità H e la faccia inferiore a profondità $H + d$ rispetto alla superficie libera. Le pressioni sulle due facce (di area S) sono:

$$P_1 = P_0 + \rho_{\text{fl}} g H \quad P_2 = P_0 + \rho_{\text{fl}} g (H + d)$$

Le forze normali alle facce orizzontali (verso il basso sulla faccia superiore, verso l'alto su quella inferiore) danno una risultante verticale verso l'alto:

$$F_2 - F_1 = (P_2 - P_1) S = \rho_{\text{fl}} g d S = \rho_{\text{fl}} V_{\text{corpo}} g$$

La pressione atmosferica P_0 agisce ugualmente su entrambe le facce e si elide. Questo risultato si estende a corpi di forma arbitraria con il seguente argomento: si immagina di sostituire il corpo con un eguale volume di fluido; tale volume sarebbe in equilibrio sotto l'azione del peso e della risultante delle forze di superficie esercitate dal fluido circostante. Poiché le forze di superficie non dipendono dalla natura del materiale dentro il volume, la risultante è la stessa anche quando è il corpo solido a essere immerso. $\square$

5.1 Condizioni di galleggiamento

Il corpo immerso è soggetto al proprio peso $P_c = \rho_c V_c g$ e alla spinta $F_A = \rho_{fl} V_{\text{imm}} g$:

- $\rho_c > \rho_{fl}$: il peso supera la spinta massima (a corpo interamente immerso), il corpo **affonda**.
- $\rho_c < \rho_{fl}$: il corpo **galleggia** parzialmente immerso; all'equilibrio il volume immerso è tale che $\rho_c V_c = \rho_{fl} V_{\text{imm}}$, cioè:

$$\frac{V_{\text{imm}}}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho_{fl}}$$

- $\rho_c = \rho_{fl}$: equilibrio indifferente con il corpo interamente immerso.

Nota – Esempi e domande paradossali

Iceberg. Il ghiaccio ha densità $\rho_{\text{ghiaccio}} \approx 0,92 \rho_{\text{acqua}}$, quindi circa 92% del volume è sommerso e solo 8% emerge. Questo spiega perché gli iceberg siano così pericolosi per le navi.

Ghiaccio che si scioglie. Se il ghiaccio galleggia in un bicchiere d'acqua, il livello dell'acqua non varia quando si scioglie. Il ghiaccio galleggiante sposta un volume d'acqua pari al suo peso; sciogliendosi produce esattamente quella quantità d'acqua, che occupa lo stesso volume precedentemente spostato.

Pietre da una barca. Se si gettano pietre dalla barca in acqua, il livello dell'acqua *scende*. Le pietre sulla barca spostano acqua pari al loro peso (un volume $\sim m/\rho_{\text{acqua}}$); immerse direttamente spostano solo il loro volume $m/\rho_{\text{pietra}} \ll m/\rho_{\text{acqua}}$, essendo le pietre molto più dense dell'acqua. Il volume totale spostato diminuisce.

5.2 Stabilità dei natanti: metacentro

Sia G il centro di massa della nave e S il centro di spinta (baricentro del volume di fluido spostato). All'equilibrio G e S sono sulla stessa verticale. Quando la nave subisce una piccola inclinazione, la forma del volume immerso cambia e il centro di spinta si sposta in S' . La verticale per S' incontra la retta GS nel punto M , detto **metacentro**.

- Se M è **sopra** G : la coppia formata da peso e spinta tende a riportare la nave in posizione verticale. L'equilibrio è **stabile**; la stabilità cresce con la distanza GM .
- Se M è **sotto** G : la coppia tende a capovolgere la nave. L'equilibrio è **instabile**.

Nota – Metacentro nei grandi traghetti

Nei grandi piroscafi il metacentro si trova solo circa 0,5 m sopra il centro di massa: sono stabili, ma con oscillazioni di rollio molto lente. Se il carico si sposta (ad esempio acqua libera nei garage, portellone aperto) il baricentro può salire sopra M : la nave diventa instabile e si rovescia improvvisamente. Le barche a vela con zavorra pesante hanno M molto più lontano da G e quindi maggiore stabilità, ma oscillazioni più ampie.

6 Dinamica dei fluidi**6.1 Campo di velocità e moto stazionario**

Lo studio del moto dei fluidi richiede di abbandonare il punto di vista delle singole particelle e adottare una descrizione di **campo**: a ogni punto $\mathbf{r}$ dello spazio occupato dal fluido e a ogni istante t si assegna un vettore velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Definizione – Moto stazionario (Def. 7.2)

Il moto di un fluido si dice **stazionario** (o **laminare**) quando il campo di velocità non dipende dal tempo: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Le diverse particelle fluide che attraversano lo stesso punto in istanti successivi hanno tutte la stessa velocità.

Osservazione – Linee di flusso e linee di corrente

Una **linea di flusso** è una curva tangente in ogni suo punto al vettore velocità locale all'istante considerato. Una **linea di corrente** è la traiettoria seguita da una particella fluida nel tempo.

Nel moto stazionario le linee di flusso non cambiano nel tempo e coincidono con le linee di corrente. Nel moto turbolento invece le linee di flusso variano rapidamente da istante a istante in modo caotico, e non vi è ripetibilità né periodicità spaziale o temporale.

Un **tubo di flusso** è la superficie formata da tutte le linee di flusso passanti per i punti di una curva chiusa. Nel moto stazionario il fluido interno non può attraversare le pareti del tubo, che si comporta come un tubo solido.

Osservazione – Turbolenza e numero di Reynolds

Il moto laminare si mantiene finché gli effetti viscosi dominano sulle fluttuazioni di velocità; quando la velocità supera un valore critico si innesca la **turbolenza**, caratterizzata da variazioni rapide e casuali del campo di velocità su scale dimensionali molto diverse. La transizione è governata dal **numero di Reynolds**: $Re = vL/\eta$, dove v è la velocità caratteristica, L la scala dimensionale e η il coefficiente di viscosità. La turbolenza è tanto più intensa quanto maggiore è Re .

6.2 Equazione di continuità**Teorema – Equazione di continuità**

In condizioni di moto stazionario, la massa di fluido contenuta in qualsiasi regione non varia nel tempo. Considerando un tubo di flusso con sezioni S_1 e S_2 (con ρ e v uniformi su ciascuna sezione):

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

Per un fluido incompressibile ($\rho_1 = \rho_2$) si ha la **conservazione della portata volumetrica** $Q = Sv$:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q = \text{costante}$$

Le velocità sono inversamente proporzionali alle sezioni: dove il tubo si restringe il fluido accelera.

Nota – Visualizzazione tramite linee di flusso

Nella rappresentazione del moto stazionario di un fluido incompressibile mediante le linee di flusso, la densità delle linee (numero di linee per unità di superficie trasversale) è proporzionale alla velocità locale: dove le linee si infittiscono il fluido va più veloce, dove sono più rare va più lento. È un modo immediato di leggere il campo di velocità da un diagramma di flusso.

7 Equazione di Bernoulli

Teorema – Equazione di Bernoulli

Nel moto stazionario di un fluido ideale (incomprimibile e non viscoso), lungo qualsiasi linea di flusso vale la relazione:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante}$$

ovvero, tra due sezioni 1 e 2 della stessa linea di flusso:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

I tre termini hanno dimensioni di lunghezza e prendono i nomi di: altezza *geometrica* (z), altezza *piezometrica* ($P/\rho g$) e altezza *di arresto* ($v^2/2g$).

Dimostrazione

Si applica il teorema lavoro-energia cinetica alla massa $dm = \rho S v dt$ che nell'intervallo dt si sposta dalla sezione 1 alla sezione 2.

Lavoro della gravità:

$$dL_g = dm g (z_1 - z_2)$$

Lavoro delle forze di pressione (le pressioni sulle pareti laterali sono perpendicolari al moto e non compiono lavoro; solo le sezioni terminali contribuiscono con segni opposti):

$$dL_P = P_1 S_1 v_1 dt - P_2 S_2 v_2 dt = \frac{dm}{\rho} (P_1 - P_2)$$

Variazione di energia cinetica:

$$dT = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2)$$

Applicando il teorema $dL_g + dL_P = dT$ e dividendo per $dm g$ si ottiene la tesi. $\square$

Nota – Significato fisico dell'equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli esprime una forma di conservazione dell'energia: la somma di energia potenziale gravitazionale, energia di pressione ed energia cinetica per unità di volume è costante lungo una linea di flusso:

$$\rho g z + P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante}$$

Dove la velocità aumenta la pressione diminuisce e viceversa. Nei fluidi a riposo ($v = 0$) si recupera la legge di Stevino.

È fondamentale ricordare che il teorema di Bernoulli vale solo per fluidi *ideali* in moto *stazionario*. In presenza di turbolenza o viscosità significativa, c'è dissipazione di energia e il teorema non è applicabile.

7.1 Applicazioni del teorema di Bernoulli

7.1.1 Legge di Torricelli

Si considera un grande serbatoio con un piccolo foro a quota h sotto la superficie libera. Poiché il serbatoio è molto grande, la velocità di abbassamento della superficie è trascurabile: $v_1 \approx 0$. Sia la superficie sia il foro sono a pressione atmosferica P_0 .

Proposizione – Legge di Torricelli (Prop. 7.3)

La velocità di efflusso da un foro posto a profondità h sotto la superficie libera di un grande serbatoio è:

$$v = \sqrt{2gh}$$

uguale alla velocità che avrebbe un corpo in caduta libera dalla stessa altezza h .

Dimostrazione

Applicando Bernoulli tra la superficie libera (sez. 1) e il foro (sez. 2), con $z_1 - z_2 = h$, $P_1 = P_2 = P_0$ e $v_1 \approx 0$:

$$h + \frac{P_0}{\rho g} = \frac{P_0}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \implies v = \sqrt{2gh}$$

□

7.1.2 Effetto Venturi e portanza

Si considera un tubo orizzontale con un restringimento ($z_1 = z_2$). Dall'equazione di continuità $S_1 v_1 = S_2 v_2$ con $S_2 < S_1$: $v_2 > v_1$. Bernoulli dà:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \implies P_1 > P_2$$

Dove la velocità è maggiore, la pressione è minore. Questo è l'effetto Venturi.

Nota – Portanza alare e deportanza

La forma asimmetrica di un'ala di aeroplano (superficie superiore più curva di quella inferiore) obbliga l'aria a percorrere un cammino più lungo sopra l'ala: per la conservazione della portata il flusso deve essere più veloce e, per Bernoulli, la pressione sulla faccia superiore è minore. La differenza di pressione tra sotto (alta) e sopra (bassa) genera una forza netta verso l'alto detta **portanza**. Si può aumentare la portanza inclinando l'ala (aumentando l'angolo di attacco α), ma oltre un valore critico i filetti fluidi si distaccano dalla superficie superiore, il moto cessa di essere laminare e si instaura lo **stallo**: la portanza crolla bruscamente.

Nelle monoposto di Formula 1 si usano profili alari *invertiti* per generare **deportanza**: la pressione è minore sotto la vettura, che viene schiacciata al suolo, aumentando l'aderenza in curva. Le vetture degli anni '70-'80 con fondo piatto e minigonne laterali sfruttavano questo principio in modo estremo, raggiungendo forze di deportanza molto elevate ma con il rischio che improvvisi distacchi del flusso causassero perdita totale di aderenza.

8 Esercizi dal testo

Esercizio 7.1

Un recipiente a forma di cubo di lato L è riempito per una frazione α del suo volume da un liquido omogeneo di densità ρ . Determinare la forza esercitata su una delle superfici laterali e sul fondo del recipiente.

Soluzione. Si prende l'asse z con origine al pelo libero e verso verso il basso, così la pressione è $P(z) = P_0 + \rho g z$. L'altezza del liquido è $h = \alpha L$.

Superficie laterale. Si integra la forza su una striscia di area $L dz$:

$$F_{\text{lat}} = \int_0^h (P_0 + \rho g z) L dz = P_0 L h + \frac{1}{2} \rho g L h^2 = (P_0 + \frac{1}{2} \rho g \alpha L) \alpha L^2$$

Il termine tra parentesi è la pressione media del liquido (a metà altezza).

Fondo. La pressione è uniforme sul fondo a profondità h :

$$F_{\text{fondo}} = (P_0 + \rho g h) L^2 = (P_0 + \rho g \alpha L) L^2$$

Esercizio 7.3

In un recipiente cilindrico di sezione $A = 800 \text{ cm}^2$ contenente acqua fino all'altezza $h = 3 \text{ cm}$ viene immerso un cubo di densità $\rho_c = 850 \text{ kg/m}^3$ e lato L uguale al raggio R della sezione (con $R < h$). Determinare la pressione che il cubo esercita sul fondo.

Soluzione. Il cubo galleggia (poiché $\rho_c < \rho_{\text{acqua}}$). La condizione di galleggiamento impone:

$$\rho_c L^3 g = \rho_{\text{acqua}} L^2 d g \quad \implies \quad d = \frac{\rho_c}{\rho_{\text{acqua}}} L = 0,85 L$$

dove d è la profondità di immersione. Il cubo *non tocca il fondo*, quindi la pressione che esso esercita sul fondo del recipiente attraverso il fluido è zero: la forza peso del cubo è sostenuta interamente dalla spinta di Archimede. La pressione idrostatica sul fondo è quella del fluido: $P_{\text{fondo}} = P_0 + \rho_{\text{acqua}} g h$.

Esercizio 7.4

Un corpo omogeneo galleggia sull'acqua con il 60% del volume immerso; sullo stesso liquido diverso galleggia con la metà del volume immersa. Determinare la densità del corpo e del secondo liquido.

Soluzione. Dalla condizione di galleggiamento in acqua ($\rho_A \approx 1000 \text{ kg/m}^3$):

$$\rho_c V g = \rho_A (0,6 V) g \quad \implies \quad \rho_c = 0,6 \rho_A = 600 \text{ kg/m}^3$$

Nel secondo liquido:

$$\rho_c V g = \rho_L (0,5 V) g \quad \implies \quad \rho_L = \frac{\rho_c}{0,5} = 2 \rho_c = 1200 \text{ kg/m}^3$$

Esercizio 7.5

Sul pavimento di un ascensore fermo è posto un recipiente contenente acqua, in cui è completamente immersa e ancorata al fondo da un filo una sfera di raggio R e densità $\rho < \rho_{\text{acqua}}$. Determinare di quanto varia la tensione del filo quando l'ascensore inizia a scendere con accelerazione costante $a < g$.

Soluzione. Sia $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ il volume della sfera. In un riferimento solidale con l'ascensore, l'accelerazione efficace di gravità è $g_{\text{eff}} = g - a$.

Ascensore fermo ($g_{\text{eff}} = g$). Equilibrio della sfera (positivo verso l'alto):

$$S_1 - mg - T_1 = 0 \implies T_1 = (\rho_{\text{acqua}} - \rho) V g$$

Ascensore in discesa ($g_{\text{eff}} = g - a$). Uguagliando le forze nel riferimento non inerziale:

$$T_2 = (\rho_{\text{acqua}} - \rho) V (g - a)$$

La variazione di tensione è:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (\rho - \rho_{\text{acqua}}) V a$$

Poiché $\rho < \rho_{\text{acqua}}$, la variazione è *negativa*: la tensione diminuisce. Nel punto di ancoraggio al fondo, $|\Delta T|$ è la variazione della reazione del fondo sulla fune, diretta verso il basso.

Esercizio 7.6

Un serbatoio cilindrico contiene acqua con la superficie libera all'altezza H dal fondo. Un piccolo foro circolare viene praticato sulla parete laterale ad altezza h dal fondo. Trovare l'altezza h che massimizza la distanza orizzontale D dal contenitore raggiunta dal getto, e calcolare D_{max} .

Soluzione. La velocità di efflusso (legge di Torricelli applicata tra la superficie libera a quota H e il foro a quota h):

$$v = \sqrt{2g(H - h)}$$

Il getto esce orizzontalmente e cade da un'altezza h : il tempo di volo è $t = \sqrt{2h/g}$. La distanza orizzontale è:

$$D(h) = v t = \sqrt{2g(H - h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H - h)}$$

Massimizzando: $\frac{dD}{dh} = 0$ dà $H - 2h = 0$, ovvero $h = H/2$. La distanza massima è:

$$D_{\text{max}} = 2\sqrt{\frac{H}{2} \cdot \frac{H}{2}} = H$$

Il foro ottimale si trova a metà del serbatoio, e la gittata massima è uguale all'altezza totale del liquido.

Esercizio 7.7

Una siringa orizzontale di sezione S e volume d'acqua V ha un foro coassiale di area $A \ll S$. Determinare il lavoro necessario per espellere il volume V in un tempo t con forza costante sullo stantuffo.

Soluzione. Indicando con v la velocità di uscita dal foro e con F la forza sullo stantuffo, Bernoulli tra l'interno della siringa (pressione $P_0 + F/S$, velocità ≈ 0 per $A \ll S$) e l'esterno (pressione P_0) dà:

$$\frac{F}{S \rho g} = \frac{v^2}{2g} \implies F h = \frac{1}{2} \rho V v^2$$

dove h è la lunghezza della colonna d'acqua nella siringa ($V = S h$).

La conservazione della massa impone $A v t = V$, quindi $v = V/(A t)$. Il lavoro compiuto è:

$$L = F h = \frac{1}{2} \rho V v^2 = \frac{\rho V^3}{2 A^2 t^2}$$

Esercizio 7.3 (riepilogo)

Sullo scafo di un'imbarcazione vi è un foro circolare di diametro $D = 2$ cm posto a una profondità $h = 1$ m sotto il pelo libero dell'acqua di mare ($\rho = 1,03 \times 10^3$ kg/m³). Determinare la forza con cui occorre premere il palmo di una mano sul foro per impedire l'ingresso d'acqua.

Soluzione. La pressione a profondità h è:

$$P = \rho g h = 1,03 \times 10^3 \times 9,8 \times 1 \approx 1,01 \times 10^4 \text{ Pa}$$

L'area del foro è $A_{\text{foro}} = \pi(D/2)^2 = \pi \times (0,01)^2 \approx 3,14 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

La forza minima necessaria è:

$$F = P \cdot A_{\text{foro}} \approx 1,01 \times 10^4 \times 3,14 \times 10^{-4} \approx 3,2 \text{ N}$$

Una forza di poco più di 3 N: sorprendentemente piccola, ma sufficiente a bloccare l'infiltrazione grazie alla ridotta area del foro.