

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 1: Modelli di programmazione lineare e soluzione grafica

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Problemi decisionali · Variabili, vincoli e funzione obiettivo · Regione ammissibile · Rette di livello · Soluzione grafica · Falegname · Succhi di frutta

Indice

1	Problemi decisionali e formulazione matematica	1
2	Un problema di produzione: il falegname	1
3	Rappresentazione grafica della regione ammissibile	2
4	Soluzione grafica: le rette di livello	3
5	Procedura di formulazione e soluzione	5
6	Un problema di miscelazione	6
7	Esercizi	7
8	Soluzioni	10

1 Problemi decisionali e formulazione matematica

Definizione – Formulazione matematica

Un **problema decisionale** chiede di prendere una decisione nel modo migliore possibile. La sua **formulazione matematica** (o *modello*) è fatta di:

- le **variabili di decisione** $x_1, \dots, x_n$: le quantità incognite da decidere;
- i **vincoli**: disuguaglianze (o uguaglianze) che le variabili devono soddisfare *contemporaneamente*;
- la **funzione obiettivo** f : un profitto da massimizzare o un costo da minimizzare.

I punti che soddisfano tutti i vincoli formano la **regione ammissibile** S . Una **soluzione ottima** di $\max_{x \in S} f(x)$ è un punto $x^* \in S$ con $f(x^*) \geq f(x)$ per ogni $x \in S$; possono essercene più d'una.

Definizione – Programmazione lineare

Un problema è di **programmazione lineare** (PL) se la funzione obiettivo e i vincoli sono *lineari* nelle variabili, cioè della forma $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ con coefficienti costanti.

2 Un problema di produzione: il falegname

Esempio – Il falegname: testo

Un falegname produce tavoli e sedie e vuole decidere quanti produrne per guadagnare il più possibile.

	ore di lavoro	legno (kg)	profitto (euro)
tavolo	3	1	30
sedia	2	2	40
disponibilità	120	100	

Esempio – Il falegname: formulazione

Con x il numero di tavoli e y il numero di sedie:

$$\begin{aligned} \max \quad & 30x + 40y \\ \text{s.t.} \quad & 3x + 2y \leq 120 \\ & x + 2y \leq 100 \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Ogni produzione è una coppia (x, y) , cioè un punto del piano. Le righe del modello si ricavano così:

- **Ore:** con effetti *lineari*, se un tavolo richiede 3 ore, x tavoli ne richiedono $3x$; con le $2y$ ore delle sedie il totale $3x + 2y$ non supera 120.
- **Legno:** x kg per i tavoli e $2y$ kg per le sedie, al più 100 kg.
- **Non negatività:** non si produce una quantità negativa di tavoli o di sedie.
- **Obiettivo:** la vendita di x tavoli e y sedie rende $30x + 40y$ euro.

Se anche un solo vincolo non è soddisfatto, manca qualche risorsa e la produzione non si può realizzare. Già il vincolo sulle ore esclude, per esempio, 100 tavoli ($300 > 120$ ore) e 100 sedie ($200 > 120$ ore).

3 Rappresentazione grafica della regione ammissibile

Con due variabili, la retta $a_1x + a_2y = \beta$ divide il piano in due **semipiani chiusi**, $a_1x + a_2y \leq \beta$ e $a_1x + a_2y \geq \beta$. Ogni vincolo è quindi un semipiano, e la regione ammissibile è l'**intersezione** dei semipiani di tutti i vincoli.

Osservazione – Quale semipiano

Si prova un punto fuori dalla retta, di solito l'origine: se $(0, 0)$ soddisfa la disuguaglianza, il semipiano è quello che contiene l'origine, altrimenti è l'altro. Per $3x + 2y \leq 120$: $0 \leq 120$, quindi il semipiano contiene l'origine.

Nel problema del falegname:

- sulla retta $3x + 2y = 120$ stanno le produzioni che usano *esattamente* le 120 ore, sotto quelle che ne usano meno;
- il semipiano contiene anche punti con $x < 0$ o $y < 0$, che non sono produzioni: con la non negatività resta il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(40, 0)$, $(0, 60)$ (Figura 1);
- il legno aggiunge il semipiano $x + 2y \leq 100$, delimitato dalla retta per $(100, 0)$ e $(0, 50)$.

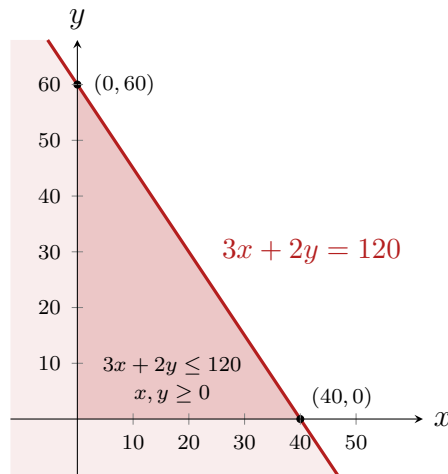


Figura 1: Il semipiano $3x + 2y \leq 120$ (in chiaro) e la sua parte nel primo quadrante (in scuro), dove stanno le produzioni che rispettano le ore disponibili.

L'insieme ammissibile è

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y \leq 120, \quad x + 2y \leq 100, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\},$$

il triangolo delle ore con la punta tagliata dalla retta del legno: il quadrilatero di vertici

$$O = (0, 0), \quad A = (40, 0), \quad B = (10, 45), \quad C = (0, 50)$$

(Figura 2). A e C stanno sugli assi; B è l'intersezione delle rette delle due risorse:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \implies 2x = 20 \implies x = 10, \quad y = \frac{100 - 10}{2} = 45.$$

Il punto $(0, 60)$ resta fuori, perché richiede $120 > 100$ kg di legno.

4 Soluzione grafica: le rette di livello

Definizione – Retta di livello

Per ogni $k \in \mathbb{R}$, la retta

$$c_1x + c_2y = k$$

contiene i punti in cui la funzione obiettivo $c_1x + c_2y$ vale k : è la **retta di livello** k (o di *profitto costante*). Al variare di k le rette sono tutte parallele.

In un problema di massimo si trasla la retta di livello nel verso in cui k cresce, finché tocca ancora la regione ammissibile. Se esiste un'ultima retta che la tocca, i suoi punti di contatto sono le soluzioni ottime; se la regione non ha fine nel verso in cui k cresce, il problema non ha soluzione ottima.

Per il falegname, $30x + 40y = k$ al crescere di k (Figura 3):

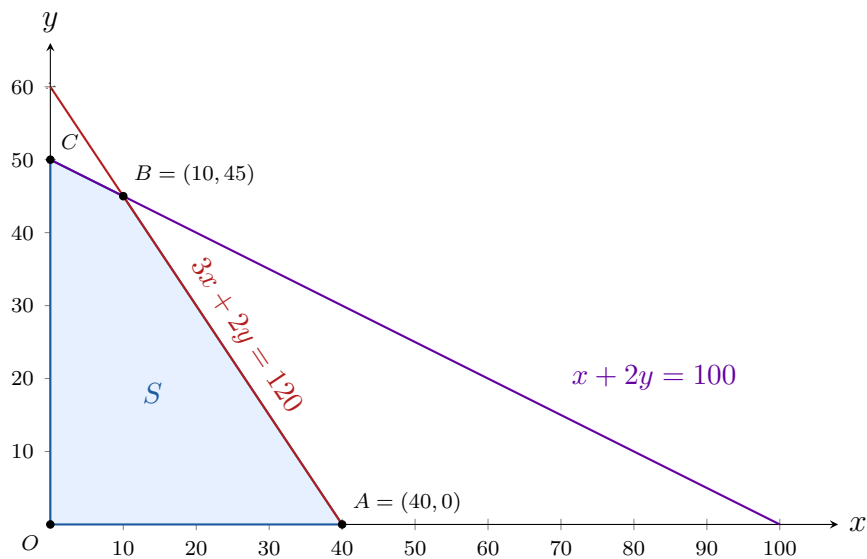


Figura 2: Regione ammissibile S del problema del falegname: il vincolo sul legno taglia la punta del triangolo delle ore.

- $k = 1000$ e $k = 1500$: la retta taglia S in un segmento di produzioni realizzabili; il resto della retta ha $x < 0$ o $y < 0$;
- $k = 2000$: il segmento si accorcia, da $C = (0, 50)$ a $(\frac{40}{3}, 40)$;
- $k = 2100$: la retta tocca S solo nel vertice B , perché $30 \cdot 10 + 40 \cdot 45 = 300 + 1800 = 2100$;
- $k > 2100$, anche di pochissimo (2101): nessun punto in comune con S .

Esempio – Il falegname: soluzione

$$(x^*, y^*) = (10, 45), \quad f(x^*, y^*) = 2100 \text{ euro} :$$

10 tavoli e 45 sedie. Si usano tutte le $3 \cdot 10 + 2 \cdot 45 = 120$ ore e tutti i $10 + 2 \cdot 45 = 100$ kg di legno.

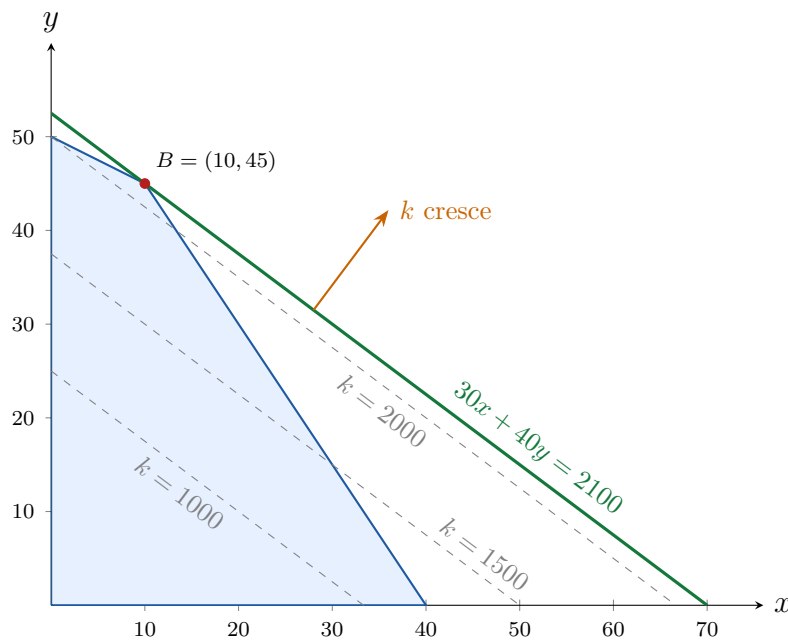


Figura 3: Rette di livello $30x + 40y = k$ per $k = 1000, 1500, 2000$ (tratteggiate) e $k = 2100$ (in verde), che tocca S solo nel vertice B .

5 Procedura di formulazione e soluzione

1. **Leggere con attenzione** la descrizione, per conoscere bene la situazione da studiare.
2. **Scegliere le variabili di decisione:** le quantità da decidere, che non sono note.
3. **Scrivere vincoli e funzione obiettivo:** le limitazioni su risorse e decisioni, con la non negatività, e il profitto da massimizzare o il costo da minimizzare.
4. **Scrivere la formulazione completa:** max o min dell'obiettivo, soggetto a tutti i vincoli.
5. **Con due variabili, risolvere graficamente:**
 - (a) disegnare i semipiani dei vincoli e la loro intersezione, la regione ammissibile;
 - (b) traslare una retta di livello nel verso di miglioramento finché tocca ancora la regione;
 - (c) calcolare i punti di contatto, intersecando le rette dei vincoli che vi passano, e il valore ottimo.

L'Esercizio 1 applica la procedura a un secondo problema di produzione; l'Esercizio 2 chiede la formulazione di un problema di scelta con un budget.

6 Un problema di miscelazione

In un problema di **miscelazione** si decide quanto prendere di ciascuna sostanza da mescolare, rispettando dei **requisiti di qualità** sul prodotto finale. Quando la quantità totale è fissata, un requisito su una percentuale o su una media pesata diventa un vincolo lineare: basta moltiplicarlo per il totale.

Esempio – La miscela di caffè: testo

Si devono produrre 1000 kg di caffè mescolando quattro miscele, al costo più basso possibile.

	costo (euro/kg)	caffeina (%)	aroma
Brasile	4,2	1,2	80
Etiopia	6,5	1,1	88
Colombia	5,4	1,3	84
Vietnam	2,8	2,2	70

Il prodotto finale deve avere:

- un aroma medio, cioè la media degli aromi pesata con le quantità, almeno pari a 80;
- una percentuale di caffeina compresa fra 1,4% e 1,7%;
- non più del 30% di miscela Vietnam, la più economica.

Esempio – La miscela di caffè: formulazione

Con x_1, x_2, x_3, x_4 i chilogrammi di Brasile, Etiopia, Colombia e Vietnam:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4,2x_1 + 6,5x_2 + 5,4x_3 + 2,8x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\
 & x_4 \leq 300 \\
 & 14 \leq 0,012x_1 + 0,011x_2 + 0,013x_3 + 0,022x_4 \leq 17 \\
 & 80x_1 + 88x_2 + 84x_3 + 70x_4 \geq 80\,000 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Le righe del modello si ricavano così:

- **Costo:** ogni quantità per il suo costo al chilogrammo, sommate; il risultato è in euro.
- **Quantità:** le quattro miscele insieme devono dare i 1000 kg.
- **Vietnam:** $x_4/1000 \leq 0,3$, cioè $x_4 \leq 300$.

- **Caffeina:** x_1 kg di Brasile contengono $0,012 x_1$ kg di caffeina, e così per le altre. Divisa per i 1000 kg, la caffeina totale dà la percentuale: $0,014 \leq (\dots)/1000 \leq 0,017$, e moltiplicando per 1000 si ottiene la riga del modello.
- **Aroma:** la media pesata $(80x_1 + 88x_2 + 84x_3 + 70x_4)/1000 \geq 80$, moltiplicata per 1000.

Obiettivo e vincoli sono lineari: è un problema di PL. Con quattro variabili la soluzione grafica della Sezione 4 non si applica.

Riepilogo

- Modello: **variabili di decisione**, **vincoli**, **funzione obiettivo**; i punti che soddisfano tutti i vincoli formano la **regione ammissibile**.
- **PL:** obiettivo e vincoli lineari nelle variabili.
- Con due variabili ogni vincolo è un semipiano; la regione ammissibile è la loro intersezione.
- Quale semipiano: si prova l'origine.
- **Retta di livello:** $c_1x + c_2y = k$; al variare di k le rette sono parallele.
- Ottimo grafico: si trasla la retta di livello nel verso di miglioramento finché tocca ancora la regione.
- Falegname: (10, 45), 2100 euro. Succhi: (40, 5), 140 euro.
- **Miscelazione:** con un totale fisso, percentuali e medie pesate diventano vincoli lineari moltiplicando per il totale.

7 Esercizi

Esercizio 1 – I succhi di frutta

Un'industria produce succo di mela e succo d'arancia in cartoni da 5 litri e dispone di 80 kg di mele, 60 kg di arance e 50 kg di zucchero.

	mele (kg)	arance (kg)	zucchero (kg)	profitto (euro)
succo di mela	2	–	1	3
succo d'arancia	–	3	2	4
disponibilità	80	60	50	

Formulare il problema e determinare graficamente quanti cartoni di ciascun succo produrre per massimizzare il profitto.

Soluzione a pagina 10 →

Esercizio 2 – Il buongustaio

Il signor Bianchi entra ogni mattina al bar sotto casa. Ha un budget massimo di 6 euro e vuole massimizzare la felicità che ottiene consumando cornetti e cappuccini:

- ogni cornetto costa 1,20 euro e gli procura 1 unità di felicità;
- ogni cappuccino costa 1,80 euro e gli procura 2 unità di felicità.

Non vuole superare 4 cornetti né 3 cappuccini. Formulare il problema.

Soluzione a pagina 11 →

Esercizio 3 – Appello del 24/06/2026, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 1

Un'industria che produce cibo per animali acquista cinque differenti ingredienti (A, B, C, D, E) che hanno differenti composizioni percentuali di grassi, proteine e carboidrati, che utilizza per ottenere un tipo di cibo pronto per la vendita. Tale cibo deve avere i seguenti requisiti: un contenuto di grassi non superiore al 25%, almeno il 20% di carboidrati e un contenuto di proteine compreso tra il 9% e il 15%. La tabella che segue riporta, per ogni ingrediente, il contenuto percentuale di grassi, proteine e carboidrati insieme al costo unitario di acquisto espresso in euro al kg.

	grassi	proteine	carboidrati	costo
A	28%	10%	35%	9
B	21%	13%	40%	7,5
C	19%	16%	41%	10
D	26%	11%	38%	12
E	24%	8%	28%	9,5

Costruire un modello lineare che permetta di determinare le quantità di ciascun ingrediente da utilizzare per produrre questo tipo di cibo in modo da minimizzare il costo complessivo e in modo da soddisfare esattamente un ordine di 920 kg di questo cibo.

Soluzione a pagina 11 →

Esercizio 4 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito C, esercizio 1

Un'azienda dolciaria ha una linea dedicata alla produzione di 3 gusti di gelato: Vaniglia, Fragola, DarkCioco. Per la produzione occorre usare 4 ingredienti: Zucchero, Uova, Aromi, Frutta. In tabella si riportano le quantità in g (grammi) di ciascun

ingrediente per la produzione di un kg dei tre gusti di gelato unitamente alle disponibilità (g) degli ingredienti ed al prezzo di vendita (euro/kg) dei tre gusti di gelato.

	Vaniglia	Fragola	DarkCioco	disp.
Zucchero	100	150	70	10 000
Uova	200	100	150	10 000
Aromi	10	0	150	10 000
Frutta	0	200	0	10 000
prezzo	50	60	75	

Formulare matematicamente il problema decisionale (usando solo funzioni lineari/affini) che massimizzi il ricavo (supponendo che tutta la produzione sia venduta) e tenendo conto che non si vuole che la produzione di DarkCioco superi il 50% del totale della produzione.

Soluzione a pagina 12 →

8 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – I succhi di frutta

Con x i cartoni di succo di mela e y quelli di succo d'arancia, il profitto è $3x + 4y$ e i vincoli sono:

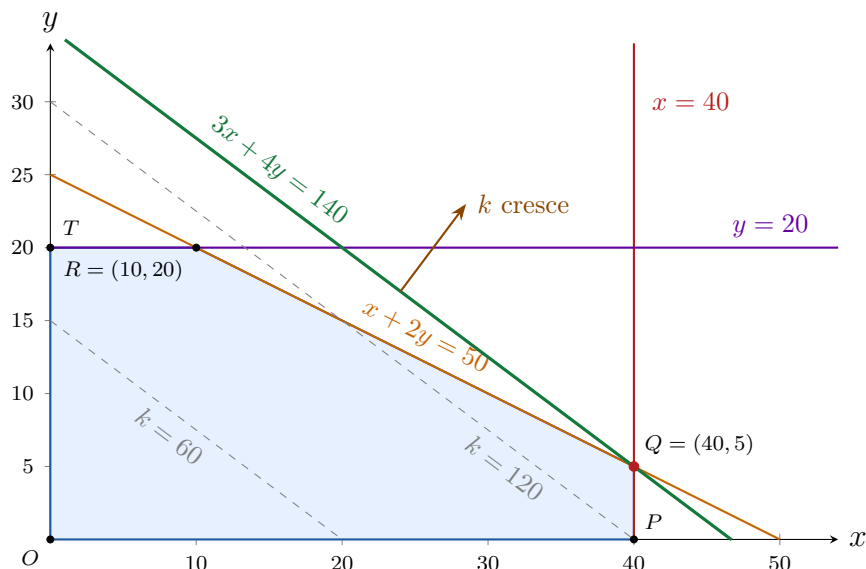
- **mele:** il succo d'arancia non ne usa, quindi $2x \leq 80$, cioè $x \leq 40$;
- **arance:** solo per il succo d'arancia, $3y \leq 60$, cioè $y \leq 20$;
- **zucchero:** $x + 2y \leq 50$;
- **non negatività:** $x \geq 0, y \geq 0$.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x + 4y \\ \text{s.t.} \quad & x + 2y \leq 50 \\ & 0 \leq x \leq 40 \\ & 0 \leq y \leq 20. \end{aligned}$$

Regione ammissibile. Le fasce $0 \leq x \leq 40$ e $0 \leq y \leq 20$ si intersecano nel rettangolo $[0, 40] \times [0, 20]$. La retta dello zucchero, per $(50, 0)$ e $(0, 25)$, ne taglia l'angolo $(40, 20)$, dove servirebbero $80 > 50$ kg di zucchero. Resta il pentagono di vertici

$$O = (0, 0), \quad P = (40, 0), \quad Q = (40, 5), \quad R = (10, 20), \quad T = (0, 20),$$

con Q da $x = 40$ e $x + 2y = 50$ ($y = 5$) e R da $y = 20$ e $x + 2y = 50$ ($x = 10$).



Soluzione grafica. La retta di livello $3x + 4y = 0$ tocca la regione solo nell'origine. Al crescere di k l'ultima retta che la tocca è $3x + 4y = 140$, solo nel vertice Q :

$$(x^*, y^*) = (40, 5), \quad 3 \cdot 40 + 4 \cdot 5 = 120 + 20 = 140 \text{ euro.}$$

Si producono 40 cartoni di succo di mela e 5 di succo d'arancia: si esauriscono le mele (80 kg) e lo zucchero ($40 + 10 = 50$ kg), mentre delle arance se ne usano 15 kg su 60.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 7](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Il buongustaio

Le decisioni sono quanti cornetti e quanti cappuccini prendere: x e y . La felicità è $x + 2y$, la spesa $1,2x + 1,8y$ euro.

$$\begin{aligned} \max \quad & x + 2y \\ \text{s.t.} \quad & 1,2x + 1,8y \leq 6 \\ & x \leq 4, \quad y \leq 3 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Il primo vincolo è il budget, il secondo i limiti su cornetti e cappuccini. Poiché cornetti e cappuccini si comprano interi, a questi vincoli si aggiunge che x e y siano numeri interi.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Appello del 24/06/2026, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 1

Con $x_A, \dots, x_E$ i chilogrammi di ciascun ingrediente, il totale è fissato a 920 kg: come nella Sezione 6, ogni requisito in percentuale si moltiplica per il totale. Per i grassi, $0,28x_A + \dots + 0,24x_E \leq 0,25 \cdot 920 = 230$, e moltiplicando per 100:

$$\begin{aligned} \min \quad & 9x_A + 7,5x_B + 10x_C + 12x_D + 9,5x_E \\ \text{s.t.} \quad & x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 920 \\ & 28x_A + 21x_B + 19x_C + 26x_D + 24x_E \leq 23\,000 \\ & 35x_A + 40x_B + 41x_C + 38x_D + 28x_E \geq 18\,400 \\ & 8280 \leq 10x_A + 13x_B + 16x_C + 11x_D + 8x_E \leq 13\,800 \\ & x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \geq 0. \end{aligned}$$

I numeri a destra sono $25 \cdot 920$, $20 \cdot 920$, $9 \cdot 920$ e $15 \cdot 920$. Il vincolo sui carboidrati è sempre soddisfatto, perché ogni ingrediente ne contiene almeno il 28%; resta nel modello perché è un requisito del testo.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito C, esercizio 1

Con x_V , x_F , x_D i kg prodotti di ciascun gusto, il ricavo è $50x_V + 60x_F + 75x_D$. Ogni ingrediente dà un vincolo come le risorse del falegname. Il totale prodotto $x_V + x_F + x_D$ non è fissato, ma la quota resta lineare:

$$x_D \leq 0,5(x_V + x_F + x_D) \iff x_D \leq x_V + x_F.$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 50x_V + 60x_F + 75x_D \\ \text{s.t.} \quad & 100x_V + 150x_F + 70x_D \leq 10\,000 \\ & 200x_V + 100x_F + 150x_D \leq 10\,000 \\ & 10x_V + 150x_D \leq 10\,000 \\ & 200x_F \leq 10\,000 \\ & x_D \leq x_V + x_F \\ & x_V, x_F, x_D \geq 0. \end{aligned}$$

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 8](#)