

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 2: Intorni, lo spazio $\mathbb{R}^n$ e le norme

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Intorni e punti di accumulazione · Reali estesi · Derivato e punti isolati
Spazio $\mathbb{R}^n$ · Prodotto scalare · Norme · Distanze e intorni in $\mathbb{R}^n$
Cauchy-Schwarz e ortogonalità

Indice

1	Intorni e punti di accumulazione in $\mathbb{R}$	1
2	I reali estesi	2
3	Insieme derivato e punti isolati	2
4	Lo spazio $\mathbb{R}^n$	3
5	Operazioni in $\mathbb{R}^n$ e prodotto scalare	4
6	Norme	6
6.1	La norma euclidea	6
6.2	Altre norme	6
7	Distanze e intorni in $\mathbb{R}^n$	8
8	Cauchy-Schwarz e ortogonalità	9
9	Esercizi	11
10	Soluzioni	13

1 Intorni e punti di accumulazione in $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ la distanza di x dall'origine è $|x|$ e la distanza fra due numeri x e y è $|x - y|$.

Definizione – Intorno sferico aperto

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$, l'**intorno sferico aperto** di centro x_0 e raggio ρ è l'insieme dei numeri che distano da x_0 meno di ρ :

$$B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \rho\} = (x_0 - \rho, x_0 + \rho).$$

In $\mathbb{R}$ è quindi l'intervallo aperto centrato in x_0 : per esempio $B(3, 2) = (1, 5)$, estremi esclusi.

Definizione – Intorno

Un **intorno** $I(x_0)$ di $x_0 \in \mathbb{R}$ è un qualunque intervallo aperto che contiene x_0 , cioè che contiene un intorno sferico $B(x_0, \rho)$ per qualche $\rho > 0$.

Il raggio non conta più: $(1, 5)$, $(0, 7)$ e $(2, 4)$ sono tutti intorni di 3.

Definizione – Punto di accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $y \in \mathbb{R}$ è **di accumulazione** per A se, arbitrariamente vicino a y , ci sono punti di A diversi da y :

$$(B(y, \rho) \cap A) \setminus \{y\} \neq \emptyset \quad \text{per ogni } \rho > 0.$$

Conta il *per ogni*: per quanto piccolo sia ρ , l'intersezione privata di y non deve mai essere vuota. Un punto di accumulazione può appartenere ad A oppure no.

Esempio – I punti di accumulazione di $(1, 7]$

Sia $A = (1, 7] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 7\}$.

- $y = 0$ non è di accumulazione: $B(0, 1) = (-1, 1)$ non contiene punti di A .
- $y = 1$ è di accumulazione anche se $1 \notin A$: ogni $B(1, \rho)$ contiene i numeri di A fra 1 e $1 + \rho$.
- $y = 3$ è di accumulazione: sta dentro l'intervallo.
- $y = 7$ è di accumulazione e appartiene ad A : ogni $B(7, \rho)$ contiene i numeri di A fra $7 - \rho$ e 7.

Errore tipico: pensare che un numero che non appartiene a un insieme non possa esserne punto di accumulazione. Il punto 1 dell'esempio lo smentisce.

Osservazione – Perché servono nei limiti

Scrivere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni x del dominio di f con $0 < |x - x_0| < \delta$. La condizione $|x - x_0| > 0$ esclude x_0 : perché la definizione abbia senso, vicino a x_0 ci devono essere punti del dominio diversi da x_0 , cioè x_0 deve essere di accumulazione per il dominio di f .

2 I reali estesi**Definizione – Reali estesi**

L'insieme dei **reali estesi** si ottiene aggiungendo a $\mathbb{R}$ i due simboli $+\infty$ e $-\infty$, che non sono numeri reali:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Definizione – Intorni di $+\infty$ e di $-\infty$

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sono intorni di $+\infty$ e di $-\infty$ gli insiemi

$$I(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}^* : x > a\}, \quad I(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}^* : x < b\}.$$

Un intorno di $+\infty$ contiene tutti i reali maggiori di a e il simbolo $+\infty$ stesso: come per un numero reale, il centro appartiene al suo intorno. Con questi intorni la definizione di punto di accumulazione vale anche per $y = \pm\infty$, e hanno senso i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, come $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

3 Insieme derivato e punti isolati**Definizione – Insieme derivato**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^*$. Il **derivato** di A è l'insieme dei suoi punti di accumulazione:

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathbb{R}^* : x \text{ è di accumulazione per } A\}.$$

Definizione – Punto isolato

Un punto $x \in A$ è **isolato** se non è di accumulazione per A :

$$x \in A \setminus \mathcal{D}(A).$$

Un punto isolato appartiene ad A e ha un intorno che non contiene altri punti di A . Un punto di A che è di accumulazione, cioè $x \in A \cap \mathcal{D}(A)$, si dice **non isolato**.

Esempio – Tre insiemi e un insieme finito

A	$\mathcal{D}(A)$	punti isolati
$(1, 7]$	$[1, 7]$	nessuno
$(1, 7] \cup \{0\}$	$[1, 7]$	0
$[1, 7] \cup \{0\}$	$[1, 7]$	0
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\emptyset$	tutti

Il punto 0 è isolato perché $B(0, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ contiene, di A , solo 0. In $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ogni punto k è isolato: $B(k, \frac{1}{2})$ non contiene altri punti dell'insieme.

Due errori tipici: credere che il derivato contenga sempre l'insieme (con un insieme finito è vuoto) o che sia contenuto nell'insieme (il derivato di $(1, 7]$ contiene $1 \notin A$).

4 Lo spazio $\mathbb{R}^n$

Definizione – Prodotto cartesiano

Il **prodotto cartesiano** di due insiemi A e B è l'insieme delle coppie ordinate con il primo elemento in A e il secondo in B :

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Con più insiemi si prendono le k -uple: $A_1 \times \cdots \times A_k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in A_i\}$. Il prodotto di un insieme con sé stesso si scrive $A \times A = A^2$.

Definizione – Lo spazio $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ è il prodotto cartesiano di n copie di $\mathbb{R}$, cioè l'insieme delle n -uple ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive sempre come **vettore colonna**,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{oppure} \quad x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T,$$

come trasposto di un vettore riga.

Definizione – Relazione d'ordine

Una relazione $\leq$ è una **relazione d'ordine** se è **riflessiva** ($a \leq a$), **antisimmetrica** (se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$) e **transitiva** (se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$). È **totale** se due elementi sono sempre confrontabili: $a \leq b$ oppure $b \leq a$.

Con il solito $\leq$, $\mathbb{R}$ è totalmente ordinato. In $\mathbb{R}^n$ si può ordinare componente per componente, $x \leq y$ se $x_i \leq y_i$ per ogni i : è una relazione d'ordine, ma non totale. Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non sono confrontabili. Così, pur essendo il prodotto di insiemi totalmente ordinati, $\mathbb{R}^n$ non ha un ordine naturale che dica quale di due vettori è il più piccolo.

Definizione – Funzioni di più variabili

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una legge che assegna a ogni $x \in \mathbb{R}^n$ un numero $f(x) \in \mathbb{R}$. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ assegna a ogni $x \in \mathbb{R}^n$ un elemento $f(x) \in \mathbb{R}^m$, cioè m numeri.

5 Operazioni in $\mathbb{R}^n$ e prodotto scalare

Definizione – Somma e prodotto per uno scalare

Per $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ si opera componente per componente:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

I risultati stanno ancora in $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n$ è *chiuso* rispetto alle due operazioni, e con esse è uno **spazio vettoriale**.

Un prodotto fra due vettori si può definire in più modi, e non sempre il risultato è un vettore:

prodotto	definizione	risultato
di Hadamard	$x \circ y$, componenti $x_i y_i$	vettore di $\mathbb{R}^n$
diadico	$xy^\top$, elementi $x_i y_j$	matrice $n \times n$
interno o scalare	$x^\top y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$	numero

Nel corso si usa soprattutto il prodotto scalare.

Definizione – Prodotto scalare

Il **prodotto scalare** (o interno) di $x, y \in \mathbb{R}^n$ è il numero

$$\langle x, y \rangle = x^\top y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La scrittura $x^\top y$ è un prodotto fra matrici: la riga $x^\top$ ($1 \times n$) per la colonna y ($n \times 1$) dà una matrice 1×1 , cioè un numero.

Proposizione – Proprietà del prodotto scalare

Per ogni $x, y, v \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. **commutativa**: $x^\top y = y^\top x$;
2. **distributiva** rispetto alla somma: $x^\top (y + v) = x^\top y + x^\top v$;
3. **omogeneità**: $(\alpha x)^\top y = \alpha (x^\top y)$;
4. **nullo**: $\mathbf{0}^\top x = x^\top \mathbf{0} = 0$;
5. **positività**:

$$x^\top x \geq 0, \quad x^\top x = 0 \iff x = \mathbf{0}.$$

Le prime quattro vengono dalle proprietà del prodotto di numeri. La quinta dal fatto che $x^\top x = x_1^2 + \dots + x_n^2$ è una somma di quadrati: non è mai negativa ed è nulla solo se tutte le componenti sono nulle, cioè nell'origine.

6 Norme

Definizione – Norma

Una **norma** su $\mathbb{R}^n$ è una funzione che associa a ogni $x \in \mathbb{R}^n$ un numero reale $\|x\|$, la sua distanza dall'origine, con quattro proprietà: per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

- (i) $\|x\| \geq 0$,
- (ii) $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
- (iv) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

La (iii) è la **disuguaglianza triangolare**, la (iv) l'**omogeneità**.

Sono le quattro proprietà del valore assoluto in $\mathbb{R}$: $|x| \geq 0$; $|x| = 0$ solo per $x = 0$; $|x + y| \leq |x| + |y|$; $|\alpha x| = |\alpha| |x|$. La norma è il nome della distanza dall'origine quando gli elementi sono vettori; il simbolo con due stanghette ricorda quello del valore assoluto.

6.1 La norma euclidea

Nel piano, per il teorema di Pitagora, il punto di coordinate x_1, x_2 dista dall'origine $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; nello spazio si aggiunge x_3^2 . In $\mathbb{R}^n$:

Definizione – Norma euclidea

La **norma euclidea** (o norma 2) di $x \in \mathbb{R}^n$ è

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{x^\top x}.$$

In $\mathbb{R}^2$ le quattro proprietà si vedono una per una:

- (i) una radice quadrata non è mai negativa;
- (ii) una somma di quadrati è nulla solo nell'origine;
- (iii) $\|x + y\|_2$ è la lunghezza di un lato del triangolo che ha per altri lati x e una copia traslata di y (Figura 1), e un lato non supera la somma degli altri due;
- (iv) $\sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2} = |\alpha| \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Lo stesso vale in $\mathbb{R}^n$: la norma euclidea è una norma.

6.2 Altre norme

In $\mathbb{R}$ c'è in pratica un solo modo di misurare la distanza dall'origine, il valore assoluto; in $\mathbb{R}^n$ ce ne sono molti, e servono in situazioni diverse.

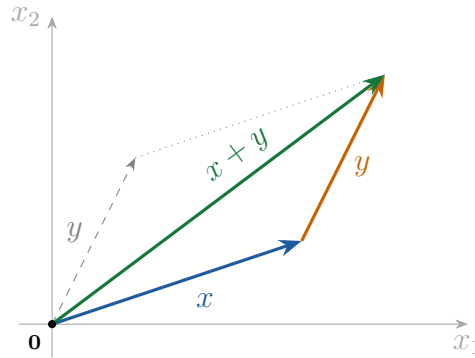


Figura 1: Disuguaglianza triangolare nel piano: il lato verde, lungo $\|x + y\|_2$, non supera la somma dei lati blu e arancione, lunghi $\|x\|_2$ e $\|y\|_2$.

Definizione – Norma p

Per ogni intero $p \geq 1$, la **norma p** di $x \in \mathbb{R}^n$ è

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Per $p = 2$ si ritrova la norma euclidea. Per $p = 1$ si ottiene la somma dei valori assoluti,

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

detta **norma Manhattan** o *taxicab*: in una città a griglia, per raggiungere un punto a piedi non si va in linea d'aria ma lungo le strade, e si percorre la somma degli spostamenti sui due assi.

Definizione – Norma infinito

La **norma infinito** (o di Chebyshev) di $x \in \mathbb{R}^n$ è il più grande dei valori assoluti delle componenti:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

È il tempo che serve a un plotter la cui testina è mossa da due motori indipendenti, alla stessa velocità, lungo due assi ortogonali: i motori lavorano insieme e il tempo dipende solo dallo spostamento più lungo.

Tutte le norme p e la norma infinito soddisfano le quattro proprietà. In $\mathbb{R}$ si riducono tutte al valore assoluto, perché $(|x|^p)^{1/p} = |x|$. In $\mathbb{R}^n$ si sceglie una norma e la si usa sempre.

Esempio – Tre norme dello stesso vettore

Per

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

si ha

$$\|x\|_2 = \sqrt{16 + 9} = 5, \quad \|x\|_1 = 4 + 3 = 7, \quad \|x\|_\infty = \max\{4, 3\} = 4.$$

In linea d'aria il punto dista 5; a piedi lungo le strade 7; la testina del plotter lo raggiunge nel tempo che le serve a percorrere 4 lungo un asse (Figura 2).

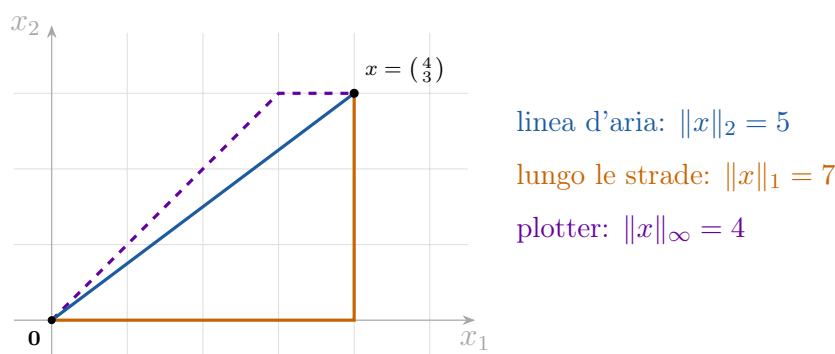


Figura 2: Tre modi di misurare la distanza di x dall'origine. Il plotter muove la testina sui due assi insieme: dopo 3 unità di tempo resta solo lo spostamento lungo x_1 , e arriva dopo 4.

Per stabilire se una funzione è una norma si controllano le quattro proprietà. Per escluderlo basta un solo esempio in cui una proprietà non vale, come negli Esercizi 1 e 2.

7 Distanze e intorni in $\mathbb{R}^n$

Definizione – Distanza e intorno sferico in $\mathbb{R}^n$

Fissata una norma, la **distanza** fra $x, y \in \mathbb{R}^n$ è la norma della loro differenza, $\|x - y\|$.
L'**intorno sferico aperto** di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $\rho > 0$ è

$$B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \rho\}.$$

La definizione è quella di $\mathbb{R}$, con la norma al posto del valore assoluto. La forma dell'intorno dipende però dalla norma scelta (Figura 3).

Le tre forme si ricavano per quadranti, dove il segno delle componenti è fissato; con ≤ 1 al posto di < 1 si aggiunge il bordo.

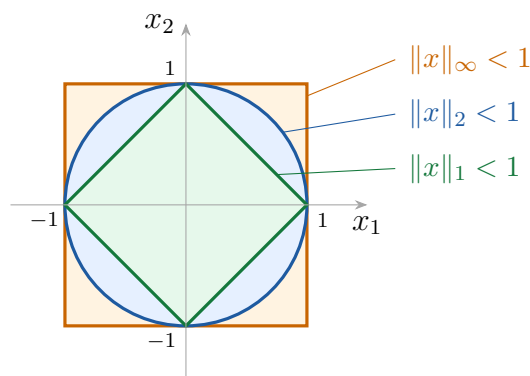


Figura 3: L'intorno sferico $B(\mathbf{0}, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ con tre norme diverse: rombo con la norma 1, cerchio con la norma euclidea, quadrato con la norma infinito.

- **Norma 1:** nel primo quadrante $|x_1| + |x_2| \leq 1$ è $x_1 + x_2 \leq 1$, il triangolo sotto la retta per $(1, 0)$ e $(0, 1)$; nel secondo è $-x_1 + x_2 \leq 1$, e così negli altri. Le quattro rette $\pm x_1 \pm x_2 = 1$ formano un quadrato ruotato di 45° , con i vertici sugli assi e lato $\sqrt{2}$.
- **Norma infinito:** nel primo quadrante, sotto la bisettrice ($x_1 \geq x_2$) il massimo è x_1 e la condizione è $x_1 \leq 1$; sopra la bisettrice è $x_2 \leq 1$. Resta il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, e nei quattro quadranti $[-1, 1] \times [-1, 1]$, di lato 2.
- **Norma euclidea:** $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ è il cerchio di centro l'origine e raggio 1.

Poiché $\mathbb{R}^n$ non è totalmente ordinato, non ha senso un simbolo più piccolo o più grande di tutti i vettori: $\mathbb{R}^n$ si estende con un solo simbolo ∞ , convenzionalmente più lontano di ogni elemento di $\mathbb{R}^n$.

Definizione – Intorno di ∞ in $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, l'intorno di ∞ di raggio $\rho > 0$ è

$$B(\infty, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > \rho\} \cup \{\infty\}.$$

8 Cauchy-Schwarz e ortogonalità

Teorema – Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|x^\top y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2,$$

con l'uguaglianza se e solo se i due vettori sono paralleli, cioè uno è multiplo dell'altro ($y = \alpha x$ oppure $x = \alpha y$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$).

Se x e y non sono nulli, $\|x\|_2 \|y\|_2 > 0$: dividendo per questo numero e togliendo il valore assoluto,

$$-1 \leq \frac{x^T y}{\|x\|_2 \|y\|_2} \leq 1.$$

Definizione – Angolo fra due vettori

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ non nulli, l'**angolo** fra x e y è il numero $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \theta = \frac{x^T y}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

Definizione – Vettori ortogonali

Due vettori non nulli $x, y \in \mathbb{R}^n$ sono **ortogonali** se il coseno del loro angolo è nullo, cioè $\theta = \pi/2$; equivalentemente, se

$$x^T y = 0.$$

L'Esercizio 5 applica la definizione a un vettore di $\mathbb{R}^4$.

Riepilogo

- **Intorno sferico:** $B(x_0, \rho) = \{x : \|x - x_0\| < \rho\}$; in $\mathbb{R}$ è $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.
- **Punto di accumulazione:** $(B(y, \rho) \cap A) \setminus \{y\} \neq \emptyset$ per ogni $\rho > 0$; y può non stare in A .
- **Derivato e isolati:** $\mathcal{D}(A)$ è l'insieme dei punti di accumulazione; isolati i punti di $A \setminus \mathcal{D}(A)$.
- **Infiniti:** $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ con $I(+\infty) = \{x > a\}$; in $\mathbb{R}^n$ un solo ∞ , con $B(\infty, \rho) = \{\|x\| > \rho\} \cup \{\infty\}$.
- $\mathbb{R}^n$: n -uple reali, vettori colonna; l'ordine componente per componente non è totale.
- **Prodotto scalare:** $x^T y = \sum_i x_i y_i$; $x^T x \geq 0$, nullo solo per $x = \mathbf{0}$.
- **Norme:** proprietà (i)–(iv); $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$, $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$; distanza $\|x - y\|$.
- **Cauchy-Schwarz:** $|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$; $\cos \theta = x^T y / (\|x\|_2 \|y\|_2)$, ortogonali se $x^T y = 0$.

9 Esercizi

Esercizio 1 – Il massimo con lo zero

In $\mathbb{R}^3$ si consideri

$$N(x) = \max\{0, x_1, x_2, x_3\}.$$

N è una norma?

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 2 – Il numero di componenti non nulle

Per $x \in \mathbb{R}^2$ sia $\sigma(x)$ il numero di componenti non nulle di x : $\sigma(\mathbf{0}) = 0$, $\sigma(x) = 1$ se una sola componente è non nulla, $\sigma(x) = 2$ se lo sono entrambe. σ è una norma?

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 3 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 3

Sia $\sigma(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

- (a) La funzione σ definisce una norma in $\mathbb{R}^n$.
- (b) $\sigma(x)$ è sempre positiva.
- (c) $\sigma(x) = 0$ se e solamente se $x = 0$.
- (d) $\sigma(x)$ non soddisfa le proprietà delle norme in $\mathbb{R}^n$.

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 4 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 7

Sia $\sigma(x_1, x_2) = \max\{0, x_1 + x_2\}$. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

- (a) $\sigma(-1, 0) < 0$.
- (b) $\sigma(0, -1) < 0$.
- (c) σ definisce una valida norma in $\mathbb{R}^2$.
- (d) σ non definisce una valida norma in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione a pagina 14 →

Esercizio 5 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 6

Sia

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

un vettore in $\mathbb{R}^4$. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

- (a) v è ortogonale a sé stesso.
- (b) Ogni vettore $x \in \mathbb{R}^4$ è ortogonale a v .
- (c) Non esiste un vettore $w \in \mathbb{R}^4$ ortogonale a v .
- (d) L'angolo tra v e il vettore $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è di 90° .

Soluzione a pagina 14 →

10 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Il massimo con lo zero

No. Per

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

si ha $N(x) = \max\{0, -1, -1, -1\} = 0$: N si annulla su un vettore diverso dall'origine e viola la proprietà (ii). Basta questo.

Manca anche l'omogeneità (iv): con x il vettore di componenti tutte uguali a 1, $N(x) = 1$ ma $N(-x) = 0 \neq |-1| N(x)$. Valgono invece la (i), perché il massimo con 0 non è mai negativo, e la (iii): ogni $x_i + y_i$ e lo 0 non superano $N(x) + N(y)$.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Il numero di componenti non nulle

No: manca l'omogeneità (iv). Per $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $\sigma(x) = 2$, e per $4x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ancora $\sigma(4x) = 2$, mentre la (iv) richiederebbe $\sigma(4x) = |4| \sigma(x) = 8$.

Le altre tre proprietà valgono: un numero di componenti non è mai negativo (i); è nullo solo se nessuna componente è non nulla, cioè per $x = \mathbf{0}$ (ii); se una componente di $x+y$ è non nulla, lo è la stessa componente di x o di y , quindi $\sigma(x+y) \leq \sigma(x) + \sigma(y)$ (iii). Basta però una proprietà che manca.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 3

(b) Falsa: per il vettore con prima componente -1 e le altre nulle, $\sigma(x) = -1 < 0$; manca quindi anche la proprietà (i).

(c) Falsa: con $n \geq 2$, il vettore con componenti 1 e -1 nelle prime due posizioni e 0 altrove non è nullo, ma $\sigma(x) = 1 - 1 = 0$; manca la proprietà (ii).

Manca anche l'omogeneità, perché $\sigma(-x) = -\sigma(x)$ mentre dovrebbe valere $|-1| \sigma(x) = \sigma(x)$. La disuguaglianza triangolare vale, come uguaglianza: $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$. Quindi (a) è falsa e (d) è vera.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 7

(a) e (b) sono false: $\sigma(-1, 0) = \max\{0, -1\} = 0$ e $\sigma(0, -1) = \max\{0, -1\} = 0$. Il massimo con 0 rende σ sempre non negativa, quindi la proprietà (i) vale.

Gli stessi due vettori, non nulli, hanno $\sigma = 0$: manca la (ii). Manca anche l'omogeneità: per $x_1 = 1, x_2 = 0$ si ha $\sigma = 1$, mentre per il vettore opposto $\sigma = 0 \neq |-1| \cdot 1$. Quindi (c) è falsa e (d) è vera.

← Torna all'Esercizio 4, pagina 11

Soluzione dell'Esercizio 5 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 6

(a) Falsa: $v^T v = 0 + 4 + 1 + 9 = 14 \neq 0$; un vettore non nullo non è mai ortogonale a sé stesso, perché $x^T x > 0$.

(b) Falsa: basta $x = v$, per il punto (a).

(c) Falsa: e_1 è non nullo e $e_1^T v = 0$. Ce ne sono infiniti: tutti i vettori non nulli con $-2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$.

(d) Vera: $e_1^T v = 0$, quindi $\cos \theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, cioè 90° .

← Torna all'Esercizio 5, pagina 12