

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 3: Topologia di $\mathbb{R}^n$

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Punti interni, esterni e di frontiera · Insiemi aperti e chiusi · Accumulazione
e punti isolati
Chiusura · Insiemi limitati e compatti · Classificare i punti di un insieme

Indice

1	Punti interni, esterni e di frontiera	1
2	Insiemi aperti e chiusi	2
3	Punti di accumulazione e punti isolati in $\mathbb{R}^n$	3
4	Chiusi, frontiera e chiusura	5
5	Insiemi limitati e compatti	6
6	Classificare i punti di un insieme	6
7	Esercizi	9
8	Soluzioni	12

1 Punti interni, esterni e di frontiera

In tutto il capitolo E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $B(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \rho\}$ è l'intorno sferico aperto di centro x e raggio $\rho > 0$ (Capitolo 2, Sezione 7). Il **complementare** di E è $\text{co}(E) = \mathbb{R}^n \setminus E$, l'insieme dei punti che non stanno in E .

Definizione – Punto interno

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è **interno** a E se un intorno sferico di x è tutto contenuto in E : esiste $\rho > 0$ tale che

$$B(x, \rho) \subseteq E.$$

L'insieme dei punti interni è l'**interno** di E , indicato con $\text{int}(E)$ oppure $\overset{\circ}{E}$.

Definizione – Punto esterno

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è **esterno** a E se è interno al complementare: esiste $\rho > 0$ tale che

$$B(x, \rho) \subseteq \text{co}(E).$$

Definizione – Punto di frontiera

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è **di frontiera** per E se non è né interno né esterno, cioè se ogni suo intorno sferico contiene punti di E e punti del complementare: per ogni $\rho > 0$

$$B(x, \rho) \cap E \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(x, \rho) \cap \text{co}(E) \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti di frontiera è la **frontiera** di E , indicata con ∂E .

Nelle figure del capitolo un bordo continuo appartiene all'insieme e un bordo tratteggiato no; un pallino pieno è un punto dell'insieme, uno vuoto un punto fuori (Figura 1).

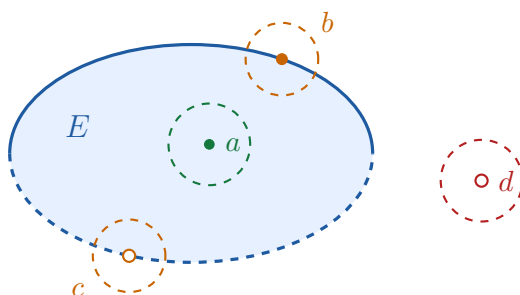


Figura 1: Un insieme E del piano: il bordo superiore appartiene a E , quello inferiore no. Il punto a è interno e d è esterno; b e c sono di frontiera, con $b \in E$ e $c \notin E$.

Proposizione – Tre casi

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. ogni punto di $\mathbb{R}^n$ è interno, esterno o di frontiera per E , in uno solo dei tre casi:

$$\mathbb{R}^n = \text{int}(E) \cup \text{int}(\text{co}(E)) \cup \partial E,$$

con i tre insiemi a due a due disgiunti;

2. un punto interno appartiene a E , un punto esterno a $\text{co}(E)$; un punto di frontiera può appartenere a E oppure no;
3. E e il suo complementare hanno la stessa frontiera: $\partial E = \partial \text{co}(E)$.

Interno ed esterno si escludono perché un intorno $B(x, \rho)$ contiene sempre il suo centro x , che non può stare sia in E sia in $\text{co}(E)$; la frontiera raccoglie i punti rimasti. La definizione di punto di frontiera non cambia se si scambiano E e $\text{co}(E)$: da qui il punto 3.

2 Insiemi aperti e chiusi

Definizione – Insieme aperto e insieme chiuso

E è **aperto** se ogni suo punto è interno, cioè se coincide con il suo interno:

$$E = \text{int}(E).$$

E è **chiuso** se il suo complementare $\text{co}(E)$ è aperto.

Errore tipico: pensare che chiuso voglia dire «non aperto». Un insieme può essere né aperto né chiuso, come già in $\mathbb{R}$ l'intervallo $[a, b)$. Le due definizioni estendono a $\mathbb{R}^n$ quelle di intervallo aperto (a, b) e intervallo chiuso $[a, b]$.

Esempio – Due rettangoli

Nel piano, $R_1 = (1, 2) \times (0, 2)$ è il prodotto di due intervalli aperti: un rettangolo senza i lati, perché ogni punto dei lati ha $x \in \{1, 2\}$ oppure $y \in \{0, 2\}$. Preso $p \in R_1$, sia $\delta > 0$ la sua distanza dal lato più vicino: $B(p, \delta) \subseteq R_1$. Ogni punto è interno, e R_1 è aperto.

$R_2 = [1, 2] \times [0, 2]$ contiene anche i lati. Preso $q \notin R_2$, q è fuori dal rettangolo e dista $\delta > 0$ dal suo punto più vicino: $B(q, \delta) \subseteq \text{co}(R_2)$. Il complementare è aperto, e R_2 è chiuso (Figura 2).

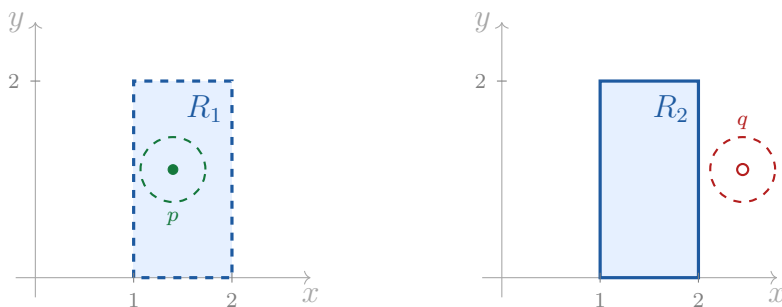


Figura 2: A sinistra $R_1 = (1, 2) \times (0, 2)$: attorno a ogni suo punto c'è un intorno contenuto in R_1 . A destra $R_2 = [1, 2] \times [0, 2]$: attorno a ogni punto esterno c'è un intorno che non tocca R_2 .

Proposizione – Unioni e intersezioni

In $\mathbb{R}^n$:

1. $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono sia aperti sia chiusi, e sono gli unici insiemi con questa proprietà;
2. l'unione di un numero finito o infinito di aperti è aperta; l'intersezione di un numero finito di aperti è aperta;
3. l'intersezione di un numero finito o infinito di chiusi è chiusa; l'unione di un numero finito di chiusi è chiusa.

$\mathbb{R}^n$ è aperto perché ogni intorno sferico sta in $\mathbb{R}^n$; $\emptyset$ è aperto perché non ha punti su cui controllare la definizione. Ciascuno è il complementare dell'altro, quindi sono anche chiusi.

Le operazioni infinite che la proposizione non nomina possono perdere la proprietà: l'intersezione di infiniti aperti può non essere aperta, l'unione di infiniti chiusi può non essere chiusa. In $\mathbb{R}$:

operazione	risultato	il risultato è
$\bigcap_{k \geq 1} (0, 1 + \frac{1}{k})$	$(0, 1]$	né aperto né chiuso
$\bigcap_{k \geq 1} (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$	$\{0\}$	chiuso
$\bigcup_{k \geq 1} [0, 1 - \frac{1}{k}]$	$[0, 1)$	né aperto né chiuso
$\bigcup_{k \geq 2} [\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}]$	$(0, 1)$	aperto

Per esempio 1 sta in ogni $(0, 1 + \frac{1}{k})$, mentre un numero $\lambda > 1$ resta fuori appena $\frac{1}{k} < \lambda - 1$.

3 Punti di accumulazione e punti isolati in $\mathbb{R}^n$

Le definizioni di punto di accumulazione, di insieme derivato $\mathcal{D}(E)$ e di punto isolato del Capitolo 2 (Sezioni 1 e 3) valgono in $\mathbb{R}^n$ senza cambiare una parola: basta usare l'intorno

sferico di $\mathbb{R}^n$. Quindi $x \in \mathbb{R}^n$ è di accumulazione per E se $(B(x, \rho) \cap E) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ per ogni $\rho > 0$, e un punto $x \in E$ è isolato se $B(x, \rho) \cap E = \{x\}$ per qualche $\rho > 0$.

Proposizione – Accumulazione, interno e frontiera

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. i punti isolati di E stanno in $\partial E \cap E$;
2. ogni punto interno a E è di accumulazione per E ;
3. i punti di accumulazione sono i punti interni e i punti di frontiera non isolati:

$$\mathcal{D}(E) = \text{int}(E) \cup (\partial E \setminus \{\text{punti isolati di } E\}).$$

Dimostrazione

1. Sia $x \in E$ isolato, con $B(x, \rho) \cap E = \{x\}$. Non è esterno, perché sta in E . Non è interno: ogni intorno $B(x, r)$ contiene punti diversi da x e vicini quanto si vuole a x , quindi dentro $B(x, \rho)$, e questi non stanno in E . Allora è di frontiera.
2. Se $B(x, \rho_0) \subseteq E$, per ogni $\rho > 0$ l'intorno $B(x, \rho)$ contiene $B(x, \min\{\rho, \rho_0\})$, che sta in E e contiene punti diversi da x .
3. Un punto esterno ha un intorno senza punti di E : non è di accumulazione. Un punto di frontiera $x \notin E$ è di accumulazione, perché ogni suo intorno contiene punti di E , tutti diversi da x . Un punto di frontiera $x \in E$ è di accumulazione se e solo se non è isolato, per definizione di punto isolato.

□

Errore tipico: credere che un punto isolato sia interno. Un intorno piccolo di un punto isolato contiene, di E , solo il centro: tutti gli altri suoi punti stanno fuori da E .

Per trovare i punti di accumulazione di un insieme si cercano quindi nell'interno e sulla frontiera, scartando i punti isolati. Un insieme può non avere punti isolati, come i due rettangoli della Sezione 2.

4 Chiusi, frontiera e chiusura

Teorema – Aperti, chiusi e frontiera

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. E è chiuso se e solo se contiene la sua frontiera, e se e solo se contiene i suoi punti di accumulazione:

$$E \text{ chiuso} \iff \partial E \subseteq E \iff \mathcal{D}(E) \subseteq E;$$

2. E è aperto se e solo se nessun suo punto è di frontiera:

$$E \text{ aperto} \iff E \cap \partial E = \emptyset.$$

Dimostrazione

1. Un punto di E non è mai esterno, quindi è interno o di frontiera. Allora $E = \text{int}(E)$ se e solo se nessun punto di E è di frontiera: è la parte 2.
2. E è chiuso se e solo se $\text{co}(E)$ è aperto, cioè, per il passo 1 applicato a $\text{co}(E)$ e per $\partial \text{co}(E) = \partial E$, se e solo se nessun punto di ∂E sta in $\text{co}(E)$: $\partial E \subseteq E$.
3. Se $\partial E \subseteq E$, per la proposizione della Sezione 3 si ha $\mathcal{D}(E) \subseteq \text{int}(E) \cup \partial E \subseteq E$. Se invece un punto di ∂E non sta in E , è di accumulazione, e $\mathcal{D}(E) \not\subseteq E$.

□

In pratica, per decidere se E è aperto o chiuso si guardano i suoi punti di frontiera, invece di controllare il complementare:

- se un punto di frontiera appartiene a E , E non è aperto;
- se un punto di frontiera non appartiene a E , E non è chiuso;
- se succedono tutte e due le cose, E non è né aperto né chiuso.

Gli Esercizi 2 e 3 lo applicano a insiemi del piano descritti da equazioni e disequazioni; gli Esercizi 6, 7 e 8 sono tratti da prove d'esame.

Definizione – Chiusura

La **chiusura** di E è l'insieme che si ottiene aggiungendo a E i suoi punti di frontiera:

$$\overline{E} = E \cup \partial E.$$

Proposizione – Interno, chiusura e frontiera

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. $\text{int}(E) \cap \partial E = \emptyset$;
2. $\text{int}(E) \subseteq E \subseteq \overline{E}$;
3. $\overline{E} = \text{int}(E) \cup \partial E$, ed è un insieme chiuso;
4. $\partial E = \overline{E} \setminus \text{int}(E)$;
5. E è chiuso se e solo se $E = \overline{E}$.

I punti 1 e 2 vengono dalle definizioni. Per il 3, ogni punto di E è interno o di frontiera, quindi aggiungere ∂E a E o a $\text{int}(E)$ dà lo stesso insieme; il 4 segue dal 3 e dal 1. Il 5 è il teorema: $E = E \cup \partial E$ vuol dire $\partial E \subseteq E$.

5 Insiemi limitati e compatti

Definizione – Insieme limitato e insieme compatto

E è **limitato** se sta in un intorno sferico dell'origine abbastanza grande: esiste $\rho > 0$ tale che

$$E \subseteq B(\mathbf{0}, \rho),$$

cioè $\|x\| < \rho$ per ogni $x \in E$. Un insieme chiuso e limitato si dice **compatto**.

Il rettangolo $R_2 = [1, 2] \times [0, 2]$ della Sezione 2 è compatto: è chiuso, e i suoi punti hanno norma euclidea al più $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} < 3$, quindi $R_2 \subseteq B(\mathbf{0}, 3)$. Il rettangolo $R_1 = (1, 2) \times (0, 2)$ è limitato ma non compatto: i punti dei lati sono di frontiera e non gli appartengono, quindi non è chiuso. L'Esercizio 5 chiede un insieme con frontiera non limitata.

6 Classificare i punti di un insieme

Per ogni punto si controlla, nell'ordine:

1. se appartiene all'insieme;
2. se è interno, esterno o di frontiera, uno solo dei tre;
3. se è di accumulazione, cioè interno oppure di frontiera ma non isolato.

Esempio – Un intervallo e un punto in $\mathbb{R}$

Sia $E = [-1, 1) \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$ (Figura 3). Per i punti $-1, 0, 1, 2, 3$:

punto	in E	interno	esterno	di frontiera	di accumulazione
-1	sì	no	no	sì	sì
0	sì	sì	no	no	sì
1	no	no	no	sì	sì
2	sì	no	no	sì	no
3	no	no	sì	no	no

- -1 sta in E , ma ogni intorno contiene numeri minori di -1 , fuori da E : è di frontiera, e di accumulazione perché vicino a lui ci sono sempre altri punti di E .
- 1 non sta in E , ma ogni intorno contiene numeri di E appena minori di 1 : è di frontiera e di accumulazione.
- 2 sta in E e $B(2, \frac{1}{2})$ contiene, di E , solo 2 : è isolato, quindi di frontiera e non di accumulazione.

Quindi $\text{int}(E) = (-1, 1)$, $\partial E = \{-1, 1, 2\}$, $\mathcal{D}(E) = [-1, 1]$ e $\overline{E} = [-1, 1] \cup \{2\}$. E non è né aperto né chiuso: $-1 \in E \cap \partial E$ e $1 \in \partial E \setminus E$.



Figura 3: L'insieme $E = [-1, 1) \cup \{2\}$: -1 e 2 appartengono a E , 1 no.

L'Esercizio 1 ripete la classificazione nel piano, con un rettangolo e un punto isolato.

Interno e frontiera dipendono dallo spazio in cui l'insieme sta: lo stesso segmento ha proprietà diverse in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^2$.

Esempio – Lo stesso segmento in $\mathbb{R}$ e nel piano

Siano

$$A = [-1, 1) \subseteq \mathbb{R}, \quad S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

cioè A copiato sull'asse x del piano (Figura 4).

	A in $\mathbb{R}$	S in $\mathbb{R}^2$
interno	$(-1, 1)$	$\emptyset$
frontiera	$\{-1, 1\}$	$S \cup \{(1, 0)\}$
chiusura	$[-1, 1]$	$\{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\}$
aperto	no, $-1 \in A \cap \partial A$	no, $(0, 0) \in S \cap \partial S$
chiuso	no, $1 \in \partial A \setminus A$	no, $(1, 0) \in \partial S \setminus S$

In $\mathbb{R}$ l'intorno $B(0, \rho)$ è l'intervallo $(-\rho, \rho)$, che per $\rho < 1$ sta in A . Nel piano $B((x, 0), \rho)$ è un disco: contiene sempre il punto $(x, \rho/2)$, che non sta sull'asse. Nessun punto di S è interno, e ciascuno è di frontiera.

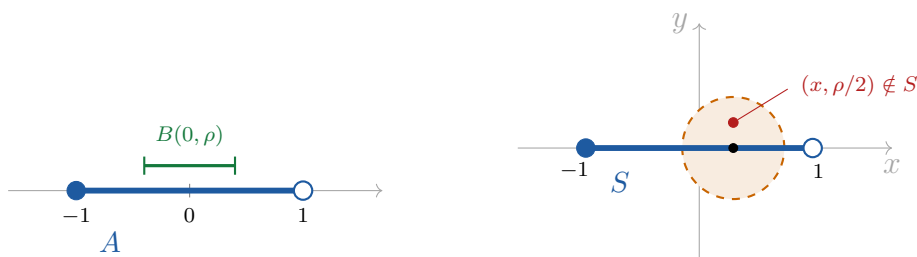


Figura 4: A sinistra $A = [-1, 1)$ in $\mathbb{R}$: un intervallo abbastanza piccolo attorno a 0 resta in A . A destra il segmento S nel piano: ogni disco centrato in un suo punto contiene punti fuori dal segmento.

Errore tipico: immaginare la frontiera come una curva che racchiude l'insieme. Il segmento S è tutto frontiera, un punto isolato è frontiera da solo, e un punto che manca in mezzo a un intervallo è di frontiera (Esercizio 4). Per decidere si usa la definizione con gli intorni.

Riepilogo

- **Tre tipi di punti:** interno se $B(x, \rho) \subseteq E$, esterno se $B(x, \rho) \subseteq \text{co}(E)$, di frontiera se ogni $B(x, \rho)$ incontra E e $\text{co}(E)$; ogni punto è in un solo caso.
- **Aperti e chiusi:** aperto se $E = \text{int}(E)$, chiuso se $\text{co}(E)$ è aperto; un insieme può non essere né l'uno né l'altro.
- **Unioni e intersezioni:** unioni qualsiasi e intersezioni finite di aperti sono aperte; intersezioni qualsiasi e unioni finite di chiusi sono chiuse.
- **Criteri con la frontiera:** E aperto $\iff E \cap \partial E = \emptyset$; E chiuso $\iff \partial E \subseteq E \iff \mathcal{D}(E) \subseteq E$.
- **Accumulazione:** $\mathcal{D}(E)$ contiene l'interno e i punti di frontiera non isolati; i punti isolati stanno in $\partial E \cap E$.
- **Chiusura:** $\overline{E} = E \cup \partial E = \text{int}(E) \cup \partial E$, chiuso; $\partial E = \overline{E} \setminus \text{int}(E)$.
- **Limitato e compatto:** limitato se $E \subseteq B(\mathbf{0}, \rho)$ per qualche ρ ; compatto se chiuso e limitato.
- **Spazio ambiente:** $[-1, 1)$ in $\mathbb{R}$ ha interno $(-1, 1)$; lo stesso segmento nel piano ha interno vuoto ed è tutto frontiera.

7 Esercizi

Esercizio 1 – Un rettangolo e un punto isolato

Nel piano si consideri

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 < y < 1\} \cup \{(2, 2)\}.$$

Per ciascuno dei punti $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ dire se appartiene a E , se è interno, esterno o di frontiera per E , e se è di accumulazione per E .

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 2 – Una retta e un disco

Sia r una retta del piano che passa per qualche punto interno al disco $\{x^2 + y^2 < 2\}$, e siano

$$E_1 = r \cap \{x^2 + y^2 \leq 2\}, \quad E_2 = r \cap \{x^2 + y^2 < 2\}, \quad E_3 = r \cap \{x^2 + y^2 = 2\}.$$

Per ciascuno dire se è aperto, chiuso o né l'uno né l'altro, limitato, compatto.

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 3 – Sopra la parabola

Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, y \leq 1\}.$$

Per ciascuno dire se è aperto, chiuso o né l'uno né l'altro, limitato, compatto, e trovare la frontiera di B .

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 4 – Un buco nella semiretta

Sia $F = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 < 0\}$. Descrivere F , trovarne la frontiera e dire se è aperto o chiuso.

Soluzione a pagina 14 →

Esercizio 5 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito A, esercizio 2

Siano $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ le ultime due cifre del proprio numero di matricola, e si scelgano $a = \max\{1, \tilde{a}\}$ e $b = \max\{1, \tilde{b}\}$. Definire (matematicamente) un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $\bar{D}$ sia vuoto, ∂D sia illimitato e $(a, b) \in \partial D$.

Soluzione a pagina 15 →

Esercizio 6 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito C, esercizio 2

Siano $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ le ultime due cifre del proprio numero di matricola, e si scelgano $a = \max\{1, \tilde{a}\}$ e $b = \max\{1, \tilde{b}\}$. Definire (matematicamente) un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che D sia né chiuso né aperto e $(a, b) \in \partial D \setminus D$.

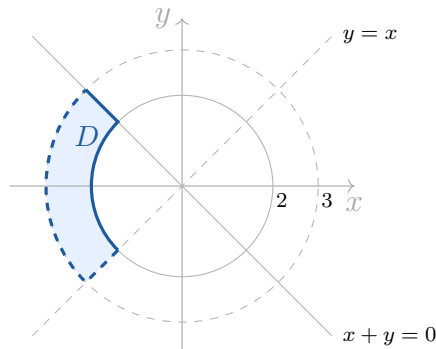
Soluzione a pagina 15 →

Esercizio 7 – Appello del 20/01/2026, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 2, adattato

Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 < 9, y > x, x + y \leq 0\},$$

la parte della corona fra le circonferenze di raggio 2 (inclusa) e 3 (esclusa) compresa fra le rette $x + y = 0$ (inclusa) e $y = x$ (esclusa):



- (a) Stabilire se D è un insieme aperto, chiuso o né chiuso né aperto, specificandone i motivi.
- (b) Esibire (ove possibile) dei punti $a \in \overset{\circ}{D}$, $b \in \partial D \cap D$, $c \in \partial D \setminus D$, $d \in \text{int}(\text{co}(D))$.

Soluzione a pagina 15 →

Esercizio 8 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 2

Dati tre punti distinti $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e un raggio $\rho > 0$ tale che $y, z \notin B(x, \rho)$, sia $A = B(x, \rho) \cup \{y, z\}$. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

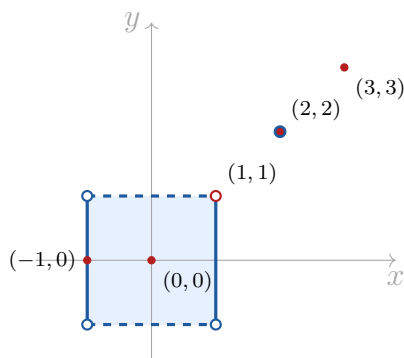
- (a) L'insieme A è né chiuso né aperto.
- (b) Nessun punto di frontiera per A appartiene ad A .
- (c) L'insieme A è aperto.
- (d) L'insieme A è chiuso.

Soluzione a pagina 16 →

8 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Un rettangolo e un punto isolato

E è un quadrato con i lati verticali e senza quelli orizzontali, più il punto staccato $(2, 2)$:



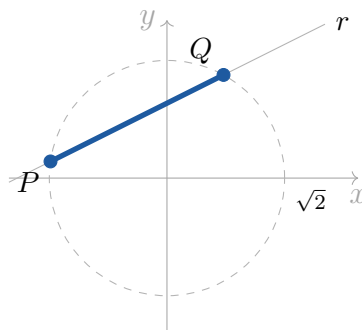
punto	in E	interno	esterno	di frontiera	di accumulazione
$(-1, 0)$	sì	no	no	sì	sì
$(0, 0)$	sì	sì	no	no	sì
$(1, 1)$	no	no	no	sì	sì
$(2, 2)$	sì	no	no	sì	no
$(3, 3)$	no	no	sì	no	no

- $(-1, 0)$ sta sul lato verticale sinistro, che appartiene a E . Ogni intorno contiene $(-1 - t, 0) \notin E$ e $(-1 + t, 0) \in E$ per $t > 0$ piccolo: è di frontiera e di accumulazione.
- $(0, 0)$: $B((0, 0), 1)$ contiene solo punti con $|x| < 1$ e $|y| < 1$, quindi sta in E . È interno, e quindi di accumulazione.
- $(1, 1)$ non sta in E , perché $y = 1$. Ogni intorno contiene i punti $(1 - t, 1 - t)$ con $t > 0$ piccolo, che stanno in E : è di frontiera, e poiché non sta in E è di accumulazione.
- $(2, 2)$ sta in E . I punti del quadrato hanno $x \leq 1$, quindi distano almeno 1 da $(2, 2)$: $B((2, 2), 1) \cap E = \{(2, 2)\}$. È isolato, dunque di frontiera e non di accumulazione.
- $(3, 3)$ non sta in E . I punti del quadrato distano da lui almeno 2 e $(2, 2)$ dista $\sqrt{2} > 1$: $B((3, 3), 1)$ non contiene punti di E . È esterno.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 9](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Una retta e un disco

La retta taglia la circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ in due punti P e Q . E_1 è il segmento PQ con gli estremi, E_2 lo stesso segmento senza gli estremi, $E_3 = \{P, Q\}$.



Come per il segmento S della Sezione 6, ogni disco centrato in un punto della retta contiene punti fuori dalla retta: nessun punto di r è interno a E_1 , E_2 o E_3 , e i punti del segmento chiuso PQ sono tutti di frontiera, per ciascuno dei tre insiemi. I punti fuori dal segmento chiuso sono esterni.

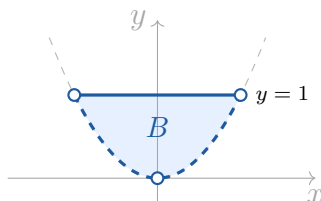
	E_1 , segmento chiuso	E_2 , senza estremi	$E_3 = \{P, Q\}$
frontiera	E_1	E_1	$\{P, Q\}$
aperto	no	no	no
chiuso	sì	no, $P \notin E_2$	sì
limitato	sì	sì	sì
compatto	sì	no	sì

Nessuno è aperto, perché ogni suo punto è di frontiera. E_1 contiene la sua frontiera ed è chiuso. E_2 non contiene P e Q , che sono di frontiera perché ogni loro intorno contiene punti del segmento aperto: non è chiuso. P e Q sono punti isolati di E_3 , quindi di frontiera, e $E_3 = \partial E_3$ è chiuso. Tutti stanno nel disco di raggio 2: sono limitati, e compatti quando sono chiusi.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 9](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Sopra la parabola

A è la regione dentro la parabola $y = x^2$, senza la parabola; B è la sua parte con $y \leq 1$, che contiene il segmento orizzontale $y = 1$, $-1 < x < 1$, ma non l'arco di parabola e neppure i punti $(\pm 1, 1)$.



1. A è aperto. Sia $(x_0, y_0) \in A$ con $h = y_0 - x_0^2 > 0$, e sia $\rho > 0$ con $\rho \leq 1$ e $\rho < h/(2|x_0| + 2)$. Se $|x - x_0| < \rho$ e $|y - y_0| < \rho$, allora $x^2 \leq (|x_0| + \rho)^2 \leq x_0^2 + (2|x_0| + 1)\rho$ e $y > y_0 - \rho$, quindi

$$y - x^2 > h - (2|x_0| + 2)\rho > 0.$$

L'intorno $B((x_0, y_0), \rho)$ sta in A : ogni punto di A è interno.

2. A è illimitato: contiene i punti $(0, t)$ per ogni $t > 0$. Non è chiuso, perché l'origine è di frontiera e non gli appartiene; non è compatto.
3. Frontiera di B : l'arco $y = x^2$ con $-1 \leq x \leq 1$ e il segmento $y = 1$ con $-1 \leq x \leq 1$.
4. B non è né aperto né chiuso: $(0, 1) \in B$ è di frontiera, perché i punti $(0, 1+t)$ non stanno in B ; $(0, 0) \notin B$ è di frontiera, perché i punti $(0, t)$ con $0 < t \leq 1$ stanno in B .
5. B è limitato: $x^2 < y \leq 1$ dà $|x| < 1$ e $0 < y \leq 1$, quindi $B \subseteq B(\mathbf{0}, 2)$. Non è compatto, perché non è chiuso.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 10](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Un buco nella semiretta

$x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$. Il fattore x^2 è positivo per $x \neq 0$, quindi il prodotto è negativo esattamente quando $x < 1$ e $x \neq 0$:

$$F = (-\infty, 0) \cup (0, 1).$$

- $1 \notin F$, e ogni intervallo $(1 - \rho, 1 + \rho)$ contiene numeri minori di 1, diversi da 0 se $\rho < 1$, che stanno in F : $1 \in \partial F$.
- $0 \notin F$, e ogni intervallo $(-\rho, \rho)$ contiene numeri di F a sinistra e a destra di 0: anche $0 \in \partial F$, benché tutto intorno ci siano punti di F .
- Ogni altro punto di F è interno, ogni punto $x > 1$ è esterno.

Quindi $\partial F = \{0, 1\}$. Nessun punto di frontiera sta in F : F è aperto. Non è chiuso, perché non contiene la sua frontiera.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 10](#)

Soluzione dell'Esercizio 5 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito A, esercizio 2

Serve un insieme senza punti interni, che vada all'infinito e passi per (a, b) . Per esempio la retta per (a, b) parallela alla bisettrice:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + b - a\}.$$

1. *Interno vuoto.* Per $p = (x_0, y_0) \in D$ e $\rho > 0$, il punto $(x_0, y_0 + \rho/2)$ sta in $B(p, \rho)$ ma non sulla retta. Nessun intorno di p sta in D .
2. $\partial D = D$. Per lo stesso motivo ogni $p \in D$ è di frontiera. Un punto $q = (x_1, y_1) \notin D$ ha $\delta = |y_1 - x_1 - b + a| > 0$. Se $(x, y) \in B(q, \delta/2)$, ogni componente dista da quella di q meno di $\delta/2$, quindi

$$|y - x - b + a| \geq \delta - |y - y_1| - |x - x_1| > 0 :$$

$B(q, \delta/2)$ non tocca D , e q è esterno.

3. *Frontiera illimitata.* Per ogni $\rho > 0$ il punto $(\rho, \rho + b - a)$ sta in ∂D e ha norma almeno ρ , quindi non sta in $B(\mathbf{0}, \rho)$: nessun intorno dell'origine contiene ∂D .
4. $(a, b) \in D = \partial D$, perché $b = a + b - a$.

[← Torna all'Esercizio 5, pagina 10](#)

Soluzione dell'Esercizio 6 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito C, esercizio 2

Basta un rettangolo a cui manca il lato su cui sta (a, b) , per esempio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < a, 0 \leq y \leq 2b\}.$$

1. $(a, b) \notin D$, perché $x = a$. Ogni intorno $B((a, b), \rho)$ contiene $(a - t, b)$ con $0 < t < \min\{\rho, a\}$, che sta in D . Quindi $(a, b) \in \partial D \setminus D$, e D non è chiuso.
2. $(0, 0) \in D$, e ogni intorno $B((0, 0), \rho)$ contiene $(-\rho/2, 0) \notin D$. Quindi $(0, 0) \in \partial D \cap D$, e D non è aperto.

[← Torna all'Esercizio 6, pagina 10](#)

Soluzione dell'Esercizio 7 – Appello del 20/01/2026, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 2, adattato

1. $b = (-2, 0)$ sta in D : $x^2 + y^2 = 4$, $0 > -2$, $-2 \leq 0$. Ogni intorno $B(b, r)$ contiene $(-2 + t, 0)$ con $0 < t < \min\{r, 2\}$, per cui $x^2 + y^2 = (2 - t)^2 < 4$: fuori da D . Quindi $b \in \partial D \cap D$, e D non è aperto.
2. $c = (-3, 0)$ non sta in D , perché $x^2 + y^2 = 9$. Ogni intorno $B(c, r)$ contiene

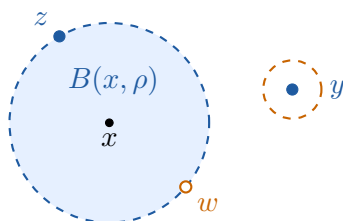
$(-3+t, 0)$ con $0 < t < \min\{r, 1\}$, che sta in D : $(3-t)^2$ è fra 4 e 9, $0 > -3+t$ e $-3+t \leq 0$. Quindi $c \in \partial D \setminus D$, e D non è chiuso.

3. $a = (-\frac{5}{2}, 0)$ è interno, con $B(a, \frac{1}{2}) \subseteq D$. Se $p = (x, y)$ dista meno di $\frac{1}{2}$ da a , la disuguaglianza triangolare dà $2 < \|p\|_2 < 3$, cioè $4 < x^2 + y^2 < 9$. Inoltre $|x + \frac{5}{2}| < \frac{1}{2}$ e $|y| < \frac{1}{2}$, quindi $x < -2$: $y - x > -\frac{1}{2} + 2 > 0$ e $x + y < -2 + \frac{1}{2} < 0$.
4. $d = (0, 0)$: $B(d, 2) = \{x^2 + y^2 < 4\}$ non ha punti di D , quindi $d \in \text{int}(\text{co}(D))$.

(a) D non è né aperto né chiuso. (b) Per esempio $a = (-\frac{5}{2}, 0)$, $b = (-2, 0)$, $c = (-3, 0)$, $d = (0, 0)$.

← Torna all'Esercizio 7, pagina 10

Soluzione dell'Esercizio 8 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 2



1. y è di frontiera. Sia $u = (y - x)/\|y - x\|$, con $\|y - x\| \geq \rho$ perché $y \notin B(x, \rho)$. Per $0 < s < r$ i punti $y + su$ stanno in $B(y, r)$ e, per l'omogeneità della norma, $\|y + su - x\| = \|y - x\| + s > \rho$: non stanno nell'intorno di x , e al più uno di loro è z . Nessun intorno di y sta in A ; poiché $y \in A$, è di frontiera.
2. Un punto di frontiera fuori da A , per $n \geq 2$. Il bordo $\{w : \|w - x\| = \rho\}$ ha infiniti punti; se ne prende uno w diverso da y e z , che quindi non sta in A . Ogni $B(w, r)$ contiene i punti $x + t(w - x)$ con $\max\{0, 1 - r/\rho\} < t < 1$, che distano $t\rho < \rho$ da x e stanno in A . Quindi $w \in \partial A \setminus A$.

Per il passo 1, $y \in A \cap \partial A$: (b) è falsa e A non è aperto, (c) è falsa. Per il passo 2, con $n \geq 2$ A non è chiuso: (d) è falsa e (a) è vera.

In $\mathbb{R}$ ($n = 1$) il bordo di $B(x, \rho)$ ha solo i due punti $x - \rho$ e $x + \rho$. Se y e z sono proprio questi due, $A = [x - \rho, x + \rho]$, il cui complementare è unione di due semirette aperte: A è chiuso, (a) è falsa e (d) è vera. Negli altri casi uno dei due estremi resta fuori da A e le risposte sono quelle di $n \geq 2$.

← Torna all'Esercizio 8, pagina 11