

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 4: Funzioni di più variabili e dominio naturale

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Dominio, codominio e immagine · Grafico e contorni di livello
Dominio naturale · Classificare un dominio

Indice

1	Dominio, codominio e immagine	1
2	Grafico e contorni di livello	1
3	Dominio naturale	2
4	Classificare un dominio naturale	4
5	Esercizi	4
6	Soluzioni	6

1 Dominio, codominio e immagine

Definizione – Funzione di n variabili

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una legge che associa a ogni $x \in D$ un numero reale $f(x)$. L'insieme D è il **dominio**, $\mathbb{R}$ il **codominio**, e l'**immagine** è l'insieme dei valori assunti:

$$f(D) = \{f(x) : x \in D\}.$$

Il codominio è l'insieme di arrivo dichiarato; l'immagine contiene solo i valori che la funzione assume davvero. Per $f(x) = x^2$, da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, dominio e codominio sono $\mathbb{R}$, mentre l'immagine è $[0, +\infty)$: un quadrato non è mai negativo, e vale 0 solo in $x = 0$. Rispetto alle funzioni di una variabile cambia soltanto n .

2 Grafico e contorni di livello

Definizione – Grafico e contorno di livello

Data $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

- il **grafico** di f è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{n+1}$ formati da un argomento e dal valore corrispondente:

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1};$$

- per $\alpha \in \mathbb{R}$, il **contorno di livello** α è l'insieme degli argomenti in cui f vale α :

$$C_\alpha = \{x \in D : f(x) = \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Funzione, grafico e contorno sono tre oggetti diversi. La funzione è una legge; grafico e contorni sono insiemi di punti, in spazi di dimensione diversa:

variabili	grafico G_f	contorno C_α
$n = 1$	una curva in $\mathbb{R}^2$	punti di $\mathbb{R}$
$n = 2$	una superficie in $\mathbb{R}^3$	curve in $\mathbb{R}^2$
n	un insieme di $\mathbb{R}^{n+1}$	un insieme di $\mathbb{R}^n$

Esempio – Una e due variabili

- $f(x) = x^2$: il grafico $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ è la parabola; il contorno $C_1 = \{-1, 1\}$ è fatto di due punti dell'asse x , $C_0 = \{0\}$, e $C_\alpha = \emptyset$ per $\alpha < 0$.
- $f(x, y) = x^2 + y^2$: il grafico $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ è un paraboloide. Per $\alpha > 0$ il contorno $C_\alpha = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \alpha\}$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{\alpha}$ (Figura 1).

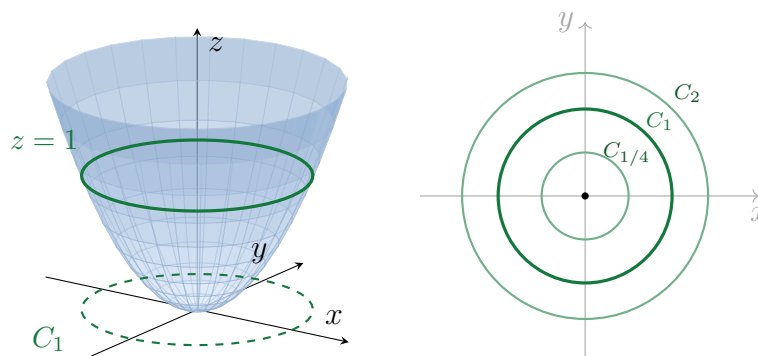


Figura 1: A sinistra il grafico di $f(x, y) = x^2 + y^2$, un paraboloide in $\mathbb{R}^3$: la curva verde è l'insieme dei suoi punti a quota 1, e la sua proiezione tratteggiata sul piano è il contorno C_1 . A destra i contorni $C_{1/4}$, C_1 e C_2 nel piano: circonferenze di raggio $\frac{1}{2}$, 1 e $\sqrt{2}$.

Le rette di livello del Capitolo 1 sono i contorni di livello della funzione obiettivo $c_1x + c_2y$: per una funzione lineare di due variabili ogni contorno C_k è una retta.

Errore tipico: confondere la funzione con il suo grafico, o il grafico con un contorno. Per f di due variabili il grafico sta in $\mathbb{R}^3$, mentre un contorno è una curva del piano delle variabili.

3 Dominio naturale

Definizione – Dominio naturale

Il **dominio naturale** di una funzione f di n variabili è il più grande insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $f(x)$ ha senso per ogni $x \in D$.

Il dominio di una funzione si può scegliere: si può decidere di calcolarla solo su alcuni punti. Il dominio naturale invece lo porta con sé la legge che definisce f . Per x^2 è tutto $\mathbb{R}$, e coincide con il dominio scelto prima.

Il dominio naturale è l'intersezione degli insiemi in cui ciascuna operazione che compare in f ha senso, con g una funzione delle variabili:

nella legge di f compare	condizione
$\sqrt{g}$	$g \geq 0$
$1/g$	$g \neq 0$
$1/\sqrt{g}$	$g > 0$
$\log g$	$g > 0$
$\arccos g$	$-1 \leq g \leq 1$

Una disuguaglianza larga lascia nel dominio i punti in cui vale l'uguaglianza; una stretta li esclude. Da questa differenza dipende se il dominio contiene la sua frontiera.

Esempio – La stessa radice, al numeratore e al denominatore

Per $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ serve $x+y \geq 0$; per $g(x, y) = 1/\sqrt{x+y}$ serve anche che il denominatore non si annulli, quindi $x+y > 0$:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0\}, \quad D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}.$$

Entrambi sono il semipiano sopra la retta $x+y=0$ (Figura 2), che è la frontiera di tutti e due.

	D_f	D_g
frontiera	la retta $x+y=0$	la retta $x+y=0$
la retta	appartiene a D_f	non appartiene a D_g
aperto	no	sì
chiuso	sì, $\partial D_f \subseteq D_f$	no
limitato	no	no

Nessuno dei due è compatto, perché sono illimitati: contengono per esempio tutti i punti (t, t) con $t > 0$.

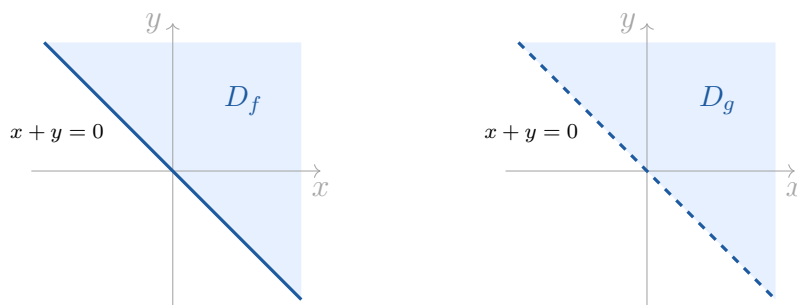


Figura 2: I domini naturali di $\sqrt{x+y}$ (a sinistra) e di $1/\sqrt{x+y}$ (a destra). Una linea continua appartiene al dominio, una tratteggiata no. Entrambi i semipiani proseguono senza fine.

4 Classificare un dominio naturale

Per studiare il dominio naturale di una funzione di due variabili:

1. si scrive una condizione per ogni operazione della legge, con la tabella della Sezione 3;
2. si disegna nel piano l'insieme di ciascuna condizione, con il bordo continuo se appartiene all'insieme e tratteggiato se no;
3. si intersecano gli insiemi: il risultato è D ;
4. si trovano la frontiera di D e i suoi punti che appartengono a D , e con i criteri del Capitolo 3 si decide se D è aperto, chiuso o né l'uno né l'altro, limitato, compatto.

Gli Esercizi 1 e 2 applicano il procedimento a due corone circolari.

Riepilogo

- **Dominio, codominio, immagine:** $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; l'immagine è $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$.
- **Grafico:** $G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
- **Contorno di livello:** $C_\alpha = \{x \in D : f(x) = \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^n$; per una funzione lineare nel piano è una retta.
- **Dominio naturale:** il più grande $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in cui $f(x)$ ha senso; è l'intersezione delle condizioni di esistenza.
- **Condizioni:** $\sqrt{g}$: $g \geq 0$; $1/g$: $g \neq 0$; $\log g$: $g > 0$; $\arccos g$: $-1 \leq g \leq 1$.
- **Disuguaglianze:** larghe tengono la frontiera nel dominio, strette la escludono.

5 Esercizi

Esercizio 1 – Una corona con un solo bordo

Sia

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \log(4 - x^2 - y^2).$$

Determinare e disegnare il dominio naturale D di f , la sua frontiera, e stabilire se D è aperto, chiuso o né l'uno né l'altro, limitato, compatto.

Soluzione a pagina 6 →

Esercizio 2 – L'arcocoseno

Sia $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 4)$. Determinare e disegnare il dominio naturale D di f e la sua frontiera. D è aperto, chiuso o né l'uno né l'altro? È compatto? Contiene i suoi punti di accumulazione?

Soluzione a pagina 6 →

Esercizio 3 – Appello del 16/06/2025, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 1

Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \sqrt{\frac{y - x^2}{y + x}}$$

- (a) determinare analiticamente e rappresentare graficamente il dominio naturale D di f ;
- (b) stabilire se D è un insieme aperto, chiuso o né chiuso né aperto, specificandone i motivi;
- (c) esibire (ove possibile) dei punti $a \in \overset{\circ}{D}$, $b \in \partial D \cap D$, $c \in \partial D \setminus D$, $d \in \text{int}(\text{co}(D))$.

Soluzione a pagina 7 →

Esercizio 4 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti I e U, esercizio 1

Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x - y} \log(2 - \max\{|x|, |y|\})$$

- (a) determinare analiticamente e rappresentare graficamente il dominio naturale D di f ;
- (b) stabilire se D è un insieme aperto, chiuso o né chiuso né aperto, specificandone i motivi;
- (c) esibire (ove possibile) dei punti $a \in \overset{\circ}{D}$, $b \in \partial D \cap D$, $c \in \partial D \setminus D$, $d \in \text{int}(\text{co}(D))$.

Soluzione a pagina 8 →

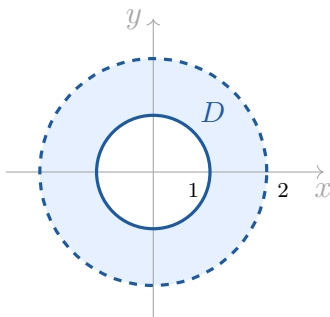
6 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Una corona con un solo bordo

La radice richiede $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, il logaritmo $4 - x^2 - y^2 > 0$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\},$$

la corona fra la circonferenza di raggio 1, inclusa, e quella di raggio 2, esclusa.



1. *Frontiera.* Sia p un punto della circonferenza di raggio 1. Ogni intorno di p contiene i punti $(1 - t)p$ e $(1 + t)p$ con $t > 0$ piccolo: i primi distano meno di 1 dall'origine e non stanno in D , i secondi stanno in D . Lo stesso vale sulla circonferenza di raggio 2. Gli altri punti sono interni o esterni, quindi

$$\partial D = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{x^2 + y^2 = 4\}.$$

2. *Aperto o chiuso.* La circonferenza di raggio 1 sta in $D \cap \partial D$: D non è aperto. Quella di raggio 2 sta in $\partial D \setminus D$: D non è chiuso. D non è né aperto né chiuso.
3. *Limitato.* Ogni punto di D ha norma euclidea minore di 2: $D \subseteq B(\mathbf{0}, 2)$, e D è limitato. Non è compatto, perché non è chiuso.

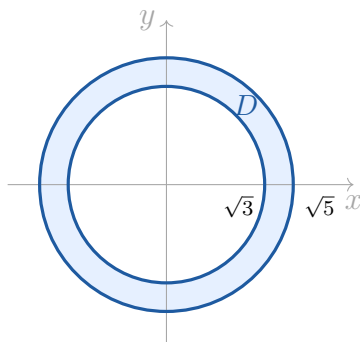
[← Torna all'Esercizio 1, pagina 4](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – L'arcocoseno

L'argomento dell'arcocoseno deve stare fra -1 e 1 :

$$-1 \leq x^2 + y^2 - 4 \leq 1 \iff 3 \leq x^2 + y^2 \leq 5,$$

quindi D è la corona fra le circonferenze di raggio $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, entrambe incluse.



Come nell'Esercizio 1, la frontiera è fatta delle due circonferenze, $x^2 + y^2 = 3$ e $x^2 + y^2 = 5$, che ora appartengono entrambe a D . Quindi $\partial D \subseteq D$ e D è chiuso; non è aperto, perché i punti di frontiera stanno in D . Ogni punto di D ha norma al più $\sqrt{5} < 3$, quindi $D \subseteq B(\mathbf{0}, 3)$ è limitato. Chiuso e limitato: D è compatto. Un insieme chiuso contiene i suoi punti di accumulazione, quindi sì.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 5](#)

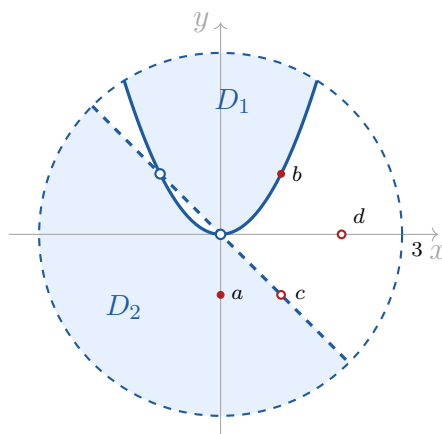
Soluzione dell'Esercizio 3 – Appello del 16/06/2025, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 1

(a) La prima radice è al denominatore: $9 - x^2 - y^2 > 0$. La seconda chiede una frazione non negativa, con denominatore non nullo: numeratore e denominatore hanno lo stesso segno, e il numeratore può annullarsi. Quindi

$$D = (D_1 \cup D_2) \cap \{x^2 + y^2 < 9\},$$

$$D_1 = \{(x, y) : y + x > 0, y \geq x^2\}, \quad D_2 = \{(x, y) : y + x < 0, y \leq x^2\}.$$

D_1 sta sopra la parabola $y = x^2$ e sopra la retta $y = -x$, D_2 sotto entrambe; la parabola e la retta si incontrano in $(0, 0)$ e $(-1, 1)$, che non stanno in D perché vi si annulla $y + x$.



(c) Si prendono $a = (0, -1)$, $b = (1, 1)$, $c = (1, -1)$, $d = (2, 0)$.

1. a : se $|x| < \frac{1}{2}$ e $|y+1| < \frac{1}{2}$, allora $y < -\frac{1}{2}$, quindi $y+x < 0$, $y < 0 \leq x^2$ e $x^2 + y^2 < \frac{1}{4} + \frac{9}{4} < 9$. L'intorno $B(a, \frac{1}{2})$ sta in $D_2 \cap \{x^2 + y^2 < 9\}$: a è interno.
2. b : $y = x^2 = 1$, $y+x = 2 > 0$ e $1+1 < 9$, quindi $b \in D_1$. I punti $(1, 1-t)$ con $t > 0$ piccolo hanno $y < x^2$ e $y+x > 0$: non stanno in D . Quindi $b \in \partial D \cap D$.
3. c : $y+x = 0$, quindi $c \notin D$. I punti $(1, -1-t)$ con $t > 0$ piccolo hanno $y+x = -t < 0$, $y < 1 = x^2$ e $1+(1+t)^2 < 9$: stanno in D_2 . Quindi $c \in \partial D \setminus D$.
4. d : se $|x-2| < \frac{1}{2}$ e $|y| < \frac{1}{2}$, allora $x^2 > \frac{9}{4} > y$ e $y+x > 1$: la frazione è negativa. L'intorno $B(d, \frac{1}{2})$ non tocca D : $d \in \text{int}(\text{co}(D))$.

(b) Per i punti b e c , D ha un punto di frontiera che gli appartiene e uno che non gli appartiene: non è né aperto né chiuso.

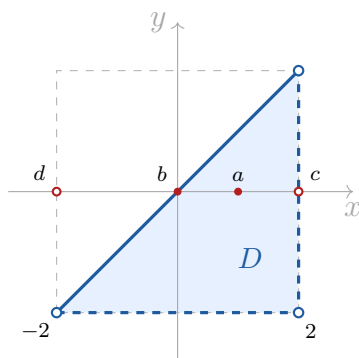
[← Torna all'Esercizio 3, pagina 5](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti I e U, esercizio 1

(a) La radice chiede $x-y \geq 0$, il logaritmo $\max\{|x|, |y|\} < 2$. Il massimo è la norma infinito, e $\|(x, y)\|_\infty < 2$ è il quadrato aperto $(-2, 2) \times (-2, 2)$. Quindi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x, \quad |x| < 2, \quad |y| < 2\},$$

il triangolo sotto la bisettrice, dentro il quadrato: il lato sulla bisettrice appartiene a D , tranne i due vertici $(-2, -2)$ e $(2, 2)$; i lati $x = 2$ e $y = -2$ no.



(c) Si prendono $a = (1, 0)$, $b = (0, 0)$, $c = (2, 0)$, $d = (-2, 0)$.

1. a : se $|x-1| < \frac{1}{2}$ e $|y| < \frac{1}{2}$, allora $y < \frac{1}{2} < x$ e $|x|, |y| < \frac{3}{2}$. L'intorno $B(a, \frac{1}{2})$ sta in D : a è interno.
2. b : $0 \leq 0$ e $\max\{0, 0\} < 2$, quindi $b \in D$. I punti $(-t, 0)$ con $t > 0$ hanno $x-y = -t < 0$ e non stanno in D : $b \in \partial D \cap D$.
3. c : $\max\{2, 0\} = 2$, quindi $c \notin D$. I punti $(2-t, 0)$ con $0 < t < 1$ stanno in D : $c \in \partial D \setminus D$.

4. d : se $|x + 2| < 1$ e $|y| < 1$, allora $x < -1 < y$, e $x - y < 0$. L'intorno $B(d, 1)$ non tocca D : $d \in \text{int}(\text{co}(D))$.

(b) Per i punti b e c , D non è né aperto né chiuso.

← Torna all'Esercizio 4, pagina 5