

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 5: Successioni in $\mathbb{R}^n$

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Successioni in $\mathbb{R}^n$ · Successioni limitate · Sottosuccessioni
Successioni ricorsive · Metodo di Newton

Indice

1	Successioni in $\mathbb{R}^n$	1
2	Successioni limitate	2
3	Sottosuccessioni	2
4	Successioni ricorsive	3
4.1	Il metodo di Newton	4
4.2	Un esempio con tre elementi precedenti	5

1 Successioni in $\mathbb{R}^n$

Definizione – Successione

Una **successione** in $\mathbb{R}^n$ è una funzione che associa a ogni intero $k \geq \bar{k}$ (spesso $\bar{k} = 0$ o 1) un vettore $x_k \in \mathbb{R}^n$, il suo **elemento** di indice k . Si indica con $\{x_k\}$.

Con $n = 1$ si ritrovano le successioni di numeri. Ciò che conta è che la successione sia definita per *tutti* gli interi da un certo $\bar{k}$ in poi, perché poi si studia che cosa succede per $k \rightarrow \infty$:

- $1/k$ per $k \geq 1$, $1/(k - 100)$ per $k > 100$ e $\sqrt{k - 50}$ per $k \geq 50$ sono successioni;
- $\log(10 - k)$ non lo è, perché per $k \geq 10$ non è definita;
- una tabella con i valori di x_1, x_2, x_3, x_4 non lo è: è una funzione definita su quattro interi soltanto.

Esempio – Una successione in $\mathbb{R}^3$

Per $k \geq 1$ sia

$$x_k = \begin{pmatrix} 1/k \\ k^2 \\ (-1)^k \end{pmatrix}.$$

I primi elementi sono

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Ogni componente è una successione di numeri: $\{1/k\}$, $\{k^2\}$ e $\{(-1)^k\}$.

Le successioni in $\mathbb{R}^n$ servono a descrivere gli **algoritmi numerici iterativi**. Un algoritmo di questo tipo produce a ogni iterazione un punto di $\mathbb{R}^n$, e quindi una successione di punti, di valori della funzione, di derivate. Studiando queste successioni si capisce come si comporta l'algoritmo prima di usarlo su un problema reale: per esempio, se la successione dei punti non diverge.

2 Successioni limitate

Definizione – Successione limitata

Una successione $\{x_k\}$ in $\mathbb{R}^n$ è **limitata** se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\|x_k\| \leq M \quad \text{per ogni } k.$$

È la definizione di $\mathbb{R}$, con la norma al posto del valore assoluto; *per ogni* k vuol dire per ogni indice in cui la successione è definita.

Proposizione – Limitatezza per componenti

Una successione in $\mathbb{R}^n$ è limitata se e solo se sono limitate le n successioni di numeri date dalle sue componenti.

Con la norma euclidea, per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e ogni componente x_i

$$|x_i| \leq \|x\|_2 \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Se $\|x_k\|_2 \leq M$, la prima disuguaglianza dà $|(x_k)_i| \leq M$ per ogni componente. Se ogni componente ha $|(x_k)_i| \leq M_i$, la seconda dà $\|x_k\|_2 \leq M_1 + \cdots + M_n$.

La successione dell'esempio precedente non è limitata, perché la seconda componente k^2 cresce senza limite; togliendo quella componente, $\{(1/k, (-1)^k)\}$ è limitata, perché $|1/k| \leq 1$ e $|(-1)^k| = 1$.

3 Sottosuccessioni

Definizione – Sottosuccessione

Data una successione $\{x_k\}$ e una successione infinita di indici crescenti $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$, la successione

$$y_h = x_{i_h}, \quad h \geq 1,$$

è una **sottosuccessione** di $\{x_k\}$. Con $K = \{i_1, i_2, \dots\}$ si scrive anche $\{x_k\}_K$.

Si scelgono infiniti elementi della successione, nel loro ordine, e si rinominano. Gli elementi devono essere infiniti, perché il risultato sia ancora una successione. Si possono prendere gli indici pari, quelli dispari, uno ogni tre; prendendoli tutti si ottiene la successione stessa.

Esempio – Gli indici pari

Per $k \geq 1$ sia

$$x_k = \begin{pmatrix} (-1)^k/k \\ (-2)^k \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Gli indici pari sono $i_h = 2h$, e la sottosuccessione è

$$y_h = x_{2h} = \begin{pmatrix} 1/(2h) \\ 4^h \end{pmatrix} :$$

$$y_1 = x_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y_2 = x_4 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad y_3 = x_6 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 64 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

perché $(-1)^{2h} = 1$ e $(-2)^{2h} = 4^h$.

Le sottosuccessioni servono perché una sottosuccessione può avere una proprietà che la successione intera non ha. Per esempio $\{(-1)^k\}$ non ha limite, mentre la sua sottosuccessione degli indici pari è costante, uguale a 1. Negli algoritmi di ottimizzazione si studiano spesso sottosuccessioni dei punti prodotti.

4 Successioni ricorsive

Definizione – Successione ricorsiva

Dati $m \geq 1$ vettori $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ e una funzione F , la successione **ricorsiva**

$$x_k = \begin{cases} a_k & \text{se } k < m, \\ F(k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-m}) & \text{se } k \geq m, \end{cases}$$

ha i primi m elementi assegnati, e calcola ogni altro elemento dagli m che lo precedono e, eventualmente, dall'indice k .

Non c'è una formula che dia x_k direttamente da k : per conoscere un elemento si parte dai valori iniziali e si calcolano, uno dopo l'altro, tutti quelli che lo precedono. È così che funziona un algoritmo numerico, e per questo la definizione ricorsiva è la più adatta a descriverlo.

Esempio – La successione di Fibonacci

Con $m = 2$, $x_0 = x_1 = 1$ e

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2} \quad (k \geq 2)$$

si ottiene 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Per conoscere x_{1000} bisogna calcolare tutti gli elementi da x_2 a x_{999} .

4.1 Il metodo di Newton

Il metodo di Newton cerca una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, quando non la si sa risolvere in forma chiusa.

1. Si sceglie un punto iniziale x_0 . Se $f(x_0) = 0$, è una soluzione.
2. Altrimenti, se $f'(x_0) \neq 0$, si prende la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

3. La tangente taglia l'asse x dove $y = 0$, cioè in

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

4. Si ripete da x_1 , finché si trova un punto in cui f si annulla.

Proposizione – Metodo di Newton

Dato x_0 , il metodo di Newton genera la successione ricorsiva

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad (k \geq 1),$$

definita finché $f'(x_{k-1}) \neq 0$.

Qui $m = 1$: ogni elemento dipende solo dal precedente, attraverso f e la sua derivata.

Esempio – Newton per $x^3 - 1$

Per $f(x) = x^3 - 1$, con $f'(x) = 3x^2$ e radice $x^* = 1$, partendo da $x_0 = 2$:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^3 - 1}{3x_{k-1}^2} :$$

$$x_1 = 2 - \frac{7}{12} \approx 1,4167, \quad x_2 \approx 1,1105, \quad x_3 \approx 1,0106, \quad x_4 \approx 1,0001.$$

I punti si avvicinano rapidamente alla radice (Figura 1).

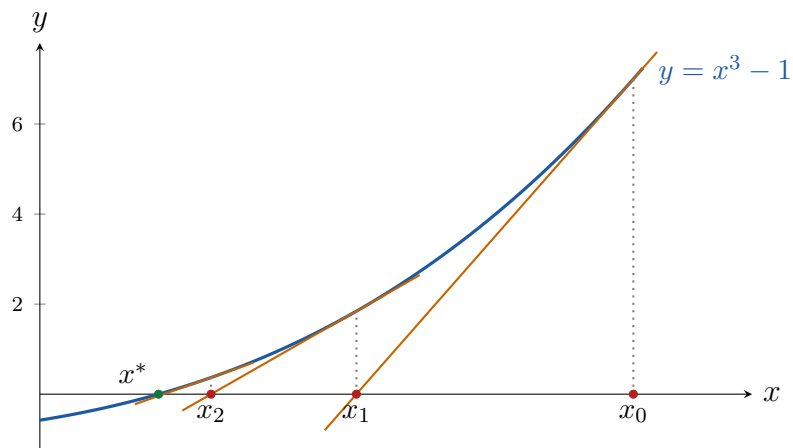


Figura 1: Il metodo di Newton per $f(x) = x^3 - 1$ da $x_0 = 2$: ogni tangente (in arancione) taglia l'asse x nel punto successivo, sempre più vicino alla radice $x^* = 1$.

4.2 Un esempio con tre elementi precedenti

Esempio – Una successione ricorsiva in $\mathbb{R}^2$ con $m = 3$

Siano

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + k x_{k-3} \quad (k \geq 3).$$

La funzione $F(k, x_{k-1}, x_{k-2}, x_{k-3})$ dipende anche dall'indice k . I primi elementi calcolati sono

$$x_3 = a_2 + a_1 + 3a_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$x_4 = x_3 + x_2 + 4x_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$x_5 = x_4 + x_3 + 5x_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

successione	spazio	m	x_k per $k \geq m$
Fibonacci	$\mathbb{R}$	2	$x_{k-1} + x_{k-2}$
Newton	$\mathbb{R}$	1	$x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$
esempio	$\mathbb{R}^2$	3	$x_{k-1} + x_{k-2} + k x_{k-3}$

Riepilogo

- **Successione:** funzione $k \mapsto x_k \in \mathbb{R}^n$ definita per tutti gli interi $k \geq \bar{k}$; descrive i punti prodotti da un algoritmo iterativo.
- **Limitata:** $\|x_k\| \leq M$ per ogni k ; equivale a componenti tutte limitate.
- **Sottosuccessione:** $y_h = x_{i_h}$ con indici crescenti $i_1 < i_2 < \dots$; si scrive $\{x_k\}_K$.
- **Ricorsiva:** $x_k = a_k$ per $k < m$, $x_k = F(k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m})$ per $k \geq m$.
- **Fibonacci:** $x_0 = x_1 = 1$, $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$.
- **Newton:** $x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$, finché $f'(x_{k-1}) \neq 0$.