

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 6: Limiti di funzioni

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Intorni e punti di accumulazione · Limite finito e infinito in un punto
Limiti all'infinito · Definizione unificata · Limiti in $\mathbb{R}^n$

Indice

1	Intorni e punti in cui si studia un limite	1
2	Limiti in un punto finito	2
3	Limiti all'infinito	3
4	Definizione unificata e limiti in $\mathbb{R}^n$	4
5	Esercizi	5
6	Soluzioni	6

1 Interni e punti in cui si studia un limite

In $\mathbb{R}^*$ e in $\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ gli interni sferici sono quelli dei Capitoli 2 e 3:

centro	intorno sferico	raggio
$x_0 \in \mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} : x - x_0 < \varepsilon\}$	$\varepsilon > 0$
$+\infty$	$\{x \in \mathbb{R} : x > M\} \cup \{+\infty\}$	$M > 0$
$-\infty$	$\{x \in \mathbb{R} : x < -M\} \cup \{-\infty\}$	$M > 0$
$x_0 \in \mathbb{R}^n$	$\{x \in \mathbb{R}^n : \ x - x_0\ < \varepsilon\}$	$\varepsilon > 0$
∞ in $\mathbb{R}_*^n$	$\{x \in \mathbb{R}^n : \ x\ > M\} \cup \{\infty\}$	$M > 0$

Definizione – Intorno

Un **intorno** di un punto x_0 di $\mathbb{R}^*$ o di $\mathbb{R}_*^n$ è un qualunque insieme aperto che contiene un intorno sferico di x_0 .

Con gli insiemi aperti il raggio non serve più: estende a $\mathbb{R}^n$ gli interni di $\mathbb{R}$ del Capitolo 2, che erano intervalli aperti.

Per studiare f vicino a un punto $\bar{x}$, con D il dominio naturale di f , ci sono tre casi:

1. $\bar{x} \in D$: il valore $f(\bar{x})$ esiste;
2. $\bar{x}$ esterno a D : vicino a $\bar{x}$ non ci sono punti di D , e non c'è nulla da studiare;
3. $\bar{x} \notin D$ ma di accumulazione per D , per esempio un punto di frontiera: $f(\bar{x})$ non esiste, ma si può studiare come si comporta $f(x)$ quando x si avvicina a $\bar{x}$. È il **limite**.

I punti di accumulazione stanno nell'interno o sulla frontiera di D (Capitolo 3); per questo, del dominio naturale, interessano soprattutto i punti di frontiera.

Esempio – $\sin(\sqrt{x})/\sqrt{x}$

La funzione

$$f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

ha dominio naturale $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, aperto.

1. $\bar{x} = \pi^2/16 \in D$: $f(\bar{x}) = \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.
2. $\bar{x} = -3$ è esterno a D : non si può dire nulla.
3. $\bar{x} = 0$ non sta in D , ma è di frontiera e di accumulazione per D : si studia $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, che vale 1.

2 Limiti in un punto finito

Definizione – Limite finito

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per D e $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ è ℓ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

e si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

A parole: $f(x)$ diventa *arbitrariamente* vicino a ℓ purché x sia *sufficientemente* vicino a x_0 e diverso da x_0 .

- *Arbitrariamente* vuol dire *per ogni* intorno di ℓ : è l'intorno $|f - \ell| < \varepsilon$.
- *Sufficientemente* vuol dire *esiste* un intorno di x_0 , magari piccolo: è l'intorno $|x - x_0| < \delta$, il cui raggio può dipendere da ε .
- La condizione $0 < |x - x_0|$ esclude x_0 : il valore di f in x_0 , se esiste, non conta.

Esempio – Il valore nel punto non conta

Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

f è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $f(1) = 0$, ma per x vicino a 1 e diverso da 1 i valori sono vicini a 2: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Definizione – Limite infinito in un punto

Con f , D e x_0 come sopra, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $N > 0$ esiste $\delta_N > 0$ tale che

$$x \in D, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_N \implies f(x) > N.$$

Per $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ la conclusione è $f(x) < -N$.

$f(x)$ diventa grande, o negativo, quanto si vuole: $\{f > N\}$ e $\{f < -N\}$ sono intorni di $+\infty$ e di $-\infty$. L'Esercizio 1 riconosce la definizione fra scritture simili.

Per verificare un limite con la definizione si fissa la soglia, si risolve la disuguaglianza su $f(x)$ e si legge il raggio δ .

Esempio – $1/x^2$ in 0

$f(x) = 1/x^2$ ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, di cui 0 è punto di accumulazione. Fissato $N > 0$, per $x \neq 0$

$$\frac{1}{x^2} > N \iff x^2 < \frac{1}{N} \iff |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Con $\delta_N = 1/\sqrt{N}$ la definizione è soddisfatta: $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 = +\infty$.

Esempio – $\log x$ in 0

$f(x) = \log x$ ha dominio $\{x > 0\}$, di cui 0 è punto di accumulazione. Fissato $N > 0$, applicando l'esponenziale, che è crescente,

$$\log x < -N \iff 0 < x < e^{-N}.$$

Con $\delta_N = e^{-N}$, per i punti del dominio con $|x - 0| < \delta_N$ vale $\log x < -N$: $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$.

3 Limiti all'infinito

Definizione – Limite finito all'infinito

Sia $+\infty$ di accumulazione per D , cioè D illimitato superiormente, e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$x \in D, \quad x > M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Per $x \rightarrow -\infty$ la condizione su x è $x < -M$.

Ora x deve essere *sufficientemente grande*, oppure sufficientemente negativo: $\{x > M\}$ è un intorno di $+\infty$. Per esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (Esercizio 2).

Il punto x_0 può essere finito, $+\infty$ o $-\infty$, e così il limite ℓ : in tutto nove casi. Ciascuno si scrive scegliendo la condizione su x dalla riga e quella su $f(x)$ dalla colonna:

	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$x_0 \in \mathbb{R}: 0 < x - x_0 < \delta$	$ f(x) - \ell < \varepsilon$	$f(x) > N$	$f(x) < -N$
$x_0 = +\infty: x > M$	$ f(x) - \ell < \varepsilon$	$f(x) > N$	$f(x) < -N$
$x_0 = -\infty: x < -M$	$ f(x) - \ell < \varepsilon$	$f(x) > N$	$f(x) < -N$

La definizione dice sempre: *per ogni* soglia sul valore (ε o N) *esiste* una soglia sul punto (δ o M) tale che, per $x \in D$, la condizione su x implica quella su $f(x)$.

4 Definizione unificata e limiti in $\mathbb{R}^n$

Definizione – Limite

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}_*^n$ di accumulazione per D e $\ell \in \mathbb{R}^*$. Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se per ogni intorno $U(\ell)$ esiste un intorno $N(x_0)$ tale che $f(x) \in U(\ell)$ per ogni $x \in (N(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\}$.

Con $n = 1$ e $x_0 \in \mathbb{R}^*$ la definizione riassume i nove casi della tabella: basta scegliere gli intorni sferici di x_0 e di ℓ . Togliere x_0 serve solo quando è un punto; un intorno di $+\infty$ non contiene altri punti da escludere.

In $\mathbb{R}^n$ la definizione non cambia: x_0 è un vettore oppure l'unico elemento ∞ , e ℓ resta nei reali estesi perché f ha valori reali. Cambiano solo gli intorni di x_0 , misurati con la norma al posto del valore assoluto. Per esempio, con $\ell \in \mathbb{R}$:

- $x_0 \in \mathbb{R}^n$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x \in D$, $0 < \|x - x_0\| < \delta$ implica $|f(x) - \ell| < \varepsilon$;
- $x_0 = \infty$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che $x \in D$, $\|x\| > M$ implica $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

In $\mathbb{R}^n$ c'è un solo infinito: $x \rightarrow \infty$ vuol dire che $\|x\|$ diventa grande, in qualunque direzione.

Riepilogo

- **Intorno**: insieme aperto che contiene un intorno sferico del punto; per $\pm\infty$ gli sferici sono $\{x > M\}$ e $\{x < -M\}$, per ∞ in $\mathbb{R}^n$ $\{\|x\| > M\}$.
- **Dove**: il limite si studia nei punti di accumulazione del dominio, anche fuori dal dominio; il valore in x_0 non conta.
- **Limite finito**: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in D, 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- **Limite infinito**: $\forall N > 0 \exists \delta_N > 0$: stessa condizione su $x \Rightarrow f(x) > N$ (o $f(x) < -N$).
- **All'infinito**: la condizione su x diventa $x > M$ o $x < -M$.
- **Unificata**: $\forall U(\ell) \exists N(x_0): x \in (N(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U(\ell)$.
- **In $\mathbb{R}^n$** : stessa definizione, con $\|x - x_0\|$ e un solo ∞ .

5 Esercizi

Esercizio 1 – Quale scrittura definisce il limite

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per D . Quali delle seguenti scritture definiscono $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$? Nelle scritture $x \in D$.

- (a) Per ogni $N < 0$ esiste $M > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < N \Rightarrow f(x) < M$.
- (b) Per ogni $A > 0$ esiste $B > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < B \Rightarrow f(x) < B$.
- (c) Per ogni $N > 0$ esiste $\delta_N > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta_N \Rightarrow f(x) < -N$.
- (d) Per ogni $A > 0$ esiste $B > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < A \Rightarrow f(x) < B$.
- (e) Per ogni $A > 0$ esiste $B > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < B \Rightarrow f(x) < -A$.

Soluzione a pagina 6 →

Esercizio 2 – Due esponenziali

Dimostrare con la definizione che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Soluzione a pagina 6 →

Esercizio 3 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 8

Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, supponiamo che risulti $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}$. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

- (a) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ quando $\|x\| > \delta$.
- (b) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ quando $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$.
- (c) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\delta > 0$ risulta $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ quando $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$.
- (d) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) > \varepsilon$ quando $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$.

Soluzione a pagina 6 →

6 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Quale scrittura definisce il limite

La definizione richiede: per ogni soglia *sul valore* esiste un raggio *sul punto* tale che $f(x)$ stia sotto la soglia cambiata di segno.

- (c) è la definizione. (e) è la stessa, con A al posto di N e B al posto di δ_N : contano il ruolo e l'ordine delle costanti, non i nomi.
- (a) non va: con $N < 0$ la condizione $0 < |x - x_0| < N$ non è soddisfatta da nessun x , e l'implicazione non dice nulla.
- (b) non va: A non compare dopo il *per ogni*, e la scrittura dice solo che vicino a x_0 f è limitata dall'alto da un numero.
- (d) non va: il raggio A è quello scelto *per ogni*, e la conclusione $f(x) < B$ dice solo che f è limitata dall'alto. La costante $f = 0$ la soddisfa con $B = 1$, ma non tende a $-\infty$.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 5](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Due esponenziali

1. Fissato $\varepsilon > 0$, poiché $e^{-x} > 0$ basta ottenere $e^{-x} < \varepsilon$. Applicando il logaritmo, che è crescente, $e^{-x} < \varepsilon \iff x > -\log \varepsilon$. Con

$$M = \max\{1, -\log \varepsilon\}$$

si ha $M > 0$, e $x > M$ implica $|e^{-x} - 0| < \varepsilon$.

2. Allo stesso modo $e^x < \varepsilon \iff x < \log \varepsilon$. Con lo stesso M , $x < -M$ implica $x < \log \varepsilon$, quindi $|e^x - 0| < \varepsilon$.

Il massimo con 1 serve solo quando $\varepsilon \geq 1$: allora $-\log \varepsilon \leq 0$, ma la definizione chiede $M > 0$.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 5](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 8

(b) Vera: è la definizione di limite finito per $x \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (Sezione 4).

Per le altre basta un controesempio: $f(x) = \|x\|$, $\bar{x} = \mathbf{0}$, $\ell = 0$. Il limite vale 0, perché $|f(x) - 0| = \|x\| < \varepsilon$ quando $0 < \|x\| < \delta = \varepsilon$.

- (a) Falsa: la condizione $\|x\| > \delta$ descrive un intorno di ∞ , non di $\bar{x}$. Nel-

l'esempio, per $\varepsilon = 1$ e qualunque δ , un punto con $\|x\| > \max\{\delta, 1\}$ ha $|f(x)| > 1$.

- (c) Falsa: chiede la conclusione per ogni raggio, anche grande. Nell'esempio, con $\varepsilon = 1$ e $\delta = 3$, il punto con $\|x\| = 2$ ha $|f(x)| = 2$.
- (d) Falsa: dice che f supera ogni ε vicino a $\bar{x}$, cioè che il limite è $+\infty$. Nell'esempio $f(x) = \|x\| < \varepsilon$ vicino a $\mathbf{0}$.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 5](#)