

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 9: Funzioni differenziabili

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Differenziabilità in $\mathbb{R}^n$ · Iperpiano tangente · Regole di differenziazione ·
Differenziale totale · Gradiente della norma
Vettori di funzioni differenziabili · Regola della catena

Indice

1	Differenziabilità in $\mathbb{R}^n$	1
2	Conseguenze della differenziabilità	1
3	Iperpiano tangente	2
4	Regole di differenziazione	3
5	Il teorema del differenziale totale	4
6	Gradiente della norma	5
7	Vettori di funzioni differenziabili	6
8	Regole per vettori di funzioni	8
9	Esercizi	11
10	Soluzioni	13

1 Differenziabilità in $\mathbb{R}^n$

Definizione – Funzione differenziabile

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è **differenziabile** in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste un vettore $a \in \mathbb{R}^n$ tale che, per $x \rightarrow x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + a^\top(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

È la definizione del Capitolo 8 per $\mathbb{R}$, con due cambi: la costante diventa un vettore a , che dipende da x_0 , e il prodotto $a(x - x_0)$ diventa il prodotto scalare $a^\top(x - x_0)$. L'errore $o(\|x - x_0\|)$ tende a 0 più rapidamente della distanza da x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a^\top(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Vicino a x_0 , quindi, f si approssima con la funzione affine $f(x_0) + a^\top(x - x_0)$: f è *linearizzabile* in x_0 .

Con $x = x_0 + d$ la definizione dice la stessa cosa in funzione dello spostamento d :

$$f(x_0 + d) = f(x_0) + a^\top d + o(\|d\|) \quad \text{per } \|d\| \rightarrow 0.$$

Differenziabile e *derivabile* sono due proprietà diverse: derivabile vuol dire che esistono le derivate parziali (Capitolo 8). Il legame è nella prossima sezione.

2 Conseguenze della differenziabilità

Proposizione – Proprietà di una funzione differenziabile

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0 , con vettore a , allora:

1. f è continua in x_0 ;
2. f è derivabile in x_0 e $\nabla f(x_0) = a$;
3. f ammette in x_0 la derivata direzionale lungo ogni direzione $d \neq 0$, e

$$Df(x_0, d) = \nabla f(x_0)^\top d.$$

Dimostrazione

Dalla definizione, nella forma con x e in quella con d :

1. per $x \rightarrow x_0$ sia $a^T(x - x_0)$ sia $o(\|x - x_0\|)$ tendono a 0, quindi $f(x) \rightarrow f(x_0)$;
2. con lo spostamento td , $t > 0$: $f(x_0 + td) - f(x_0) = t a^T d + o(t\|d\|)$; si divide per t e, per $t \rightarrow 0^+$, il rapporto incrementale tende a $a^T d$, quindi $Df(x_0, d) = a^T d$;
3. con $d = e_i$ e $d = -e_i$ si ha $Df(x_0, e_i) = a_i$ e $Df(x_0, -e_i) = -a_i$; per la proposizione del Capitolo 8 su parziali e direzionali esiste $\partial f(x_0)/\partial x_i = a_i$, per ogni i : $\nabla f(x_0) = a$, e il passo 2 dà il punto 3.

□

Il vettore della definizione è dunque il gradiente, e da qui si scrive $\nabla f(x_0)$ al posto di a . Il punto 3 è la regola per le derivate direzionali: un numero, il prodotto scalare fra il gradiente e la direzione. L'ipotesi di differenziabilità non si può togliere: la Sezione 5 mostra che cosa succede senza.

In una variabile derivabile e differenziabile coincidono (Capitolo 8). In $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, no:

$$f \text{ differenziabile in } x_0 \implies f \text{ derivabile in } x_0,$$

ma non vale il viceversa. Le due funzioni del Capitolo 8, Sezione 7, sono derivabili nell'origine ma non continue; per il punto 1 della proposizione non sono differenziabili.

3 Iperpiano tangente

Definizione – Iperpiano tangente e vettore normale

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in x_0 , l'**iperpiano tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0)\},$$

Il **vettore normale** all'iperpiano, e al grafico di f in quel punto, è

$$\begin{pmatrix} -\nabla f(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

- L'iperpiano è il grafico della funzione affine che approssima f vicino a x_0 .
- Sta in $\mathbb{R}^{n+1}$, come il grafico di f : n coordinate per x e una per y . Per $n = 2$ è un piano di $\mathbb{R}^3$ (Figura 1); per $n = 1$ è la retta tangente del Capitolo 8, con normale $(-f'(x_0), 1)$.
- Il vettore normale ha $n + 1$ componenti: le prime n sono quelle di $-\nabla f(x_0)$, l'ultima è 1.

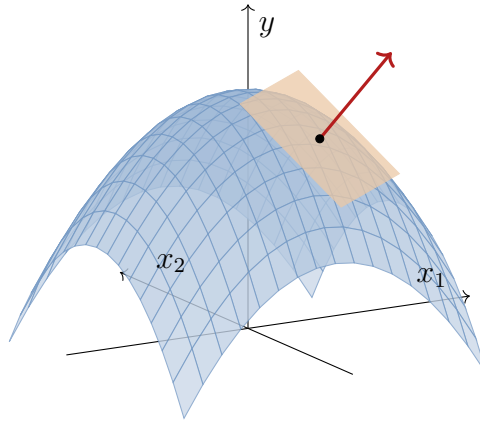


Figura 1: Il grafico di $f(x_1, x_2) = 4 - x_1^2 - x_2^2$ (in azzurro) e, nel punto $(x_0, f(x_0))$ con $x_0 = (1, \frac{1}{2})^T$, un tratto del piano tangente (in arancione) e, in rosso, la direzione del vettore normale $(-\nabla f(x_0), 1) = (2, 1, 1)$.

4 Regole di differenziazione

Verificare la differenziabilità con la definizione richiede un limite in n variabili. Due strumenti lo evitano: le regole di questa sezione, che costruiscono funzioni differenziabili da altre che lo sono, e il teorema del differenziale totale (Sezione 5).

Proposizione – Regole di differenziazione

Siano $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabili in x_0 , $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $g(x_0)$. Sono differenziabili in x_0 , con gradiente:

1. somma e multiplo: $\nabla(f + g)(x_0) = \nabla f(x_0) + \nabla g(x_0)$, $\nabla(\lambda f)(x_0) = \lambda \nabla f(x_0)$;
2. prodotto: $\nabla(fg)(x_0) = g(x_0) \nabla f(x_0) + f(x_0) \nabla g(x_0)$;
3. composta: $\nabla(\psi \circ g)(x_0) = \psi'(g(x_0)) \nabla g(x_0)$;
4. reciproco, se $g(x_0) \neq 0$: $\nabla\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) = -\frac{1}{g(x_0)^2} \nabla g(x_0)$;
5. rapporto, se $g(x_0) \neq 0$: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0) \nabla f(x_0) - f(x_0) \nabla g(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Sono le regole di derivazione di una variabile, con il gradiente al posto della derivata. Nella composta ψ è una funzione di una variabile: in $\mathbb{R}$ derivabile e differenziabile coincidono.

Dimostrazione

I punti 4 e 5 seguono dalle regole 2 e 3:

1. $1/g = \psi \circ g$ con $\psi(t) = 1/t$, derivabile in $t = g(x_0) \neq 0$ con $\psi'(t) = -1/t^2$; la regola 3 dà il punto 4;
2. $f/g = f \cdot \ell$ con $\ell = 1/g$; per la regola 2 e il punto 4,

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) (x_0) = \frac{1}{g(x_0)} \nabla f(x_0) - \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2} \nabla g(x_0) = \frac{g(x_0) \nabla f(x_0) - f(x_0) \nabla g(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

□

Le regole bastano già per molte funzioni:

- una funzione lineare $c^\top x$ (Capitolo 7) è differenziabile in ogni punto, con gradiente c : coincide con la propria approssimazione affine, con errore nullo;
- somme e prodotti di funzioni lineari danno le funzioni quadratiche e, più in generale, i polinomi, differenziabili su tutto $\mathbb{R}^n$.

5 Il teorema del differenziale totale

Teorema – Del differenziale totale

Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se

1. f è derivabile in ogni punto di un intorno di x_0 , e
2. le derivate parziali, cioè le componenti di ∇f , sono continue in x_0 ,

allora f è differenziabile in x_0 .

L'esistenza delle derivate parziali non basta; serve anche che siano continue. Il viceversa, «differenziabile $\Rightarrow$ continua e derivabile», è la proposizione della Sezione 2. In pratica: si calcola ∇f nel punto generico, si guarda dove le sue componenti sono continue, e lì si usa $Df(x_0, d) = \nabla f(x_0)^\top d$.

Esempio – Derivate direzionali di $e^{x^2+y^2}$ e di $\sin(x^2 + y^2)$

Nel Capitolo 8 si sono calcolati i gradienti

$$\nabla e^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \nabla \sin(x^2 + y^2) = 2 \cos(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le componenti sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi per il teorema le due funzioni sono differenziabili in ogni punto, e le derivate direzionali lungo $d = (1, 1)^\top$ sono la somma delle componenti del gradiente:

1. per $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ in $(-2, 1)$: $Df((-2, 1), d) = -4e^5 + 2e^5 = -2e^5$;
2. per $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ in $(1, -1)$: $Df((1, -1), d) = 2 \cos 2 - 2 \cos 2 = 0$.

Senza differenziabilità la formula può sbagliare. La funzione del Capitolo 8 che vale 0 sugli assi e 1 fuori ha $\nabla f(0, 0) = 0$, quindi $\nabla f(0, 0)^\top d = 0$ per ogni d ; ma lungo $d = (1, 1)^\top$ la derivata direzionale non esiste, perché il rapporto incrementale tende a $+\infty$.

6 Gradiente della norma

Proposizione – Gradiente della norma euclidea

1. $g(x) = \|x\|_2^2$ è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^n$ e $\nabla g(x) = 2x$.
2. $f(x) = \|x\|_2$ è differenziabile in ogni $x \neq 0$ e

$$\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|_2};$$

nell'origine non è differenziabile.

Dimostrazione

Si scrivono le funzioni con le componenti.

1. $g(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ è un polinomio, differenziabile ovunque. La variabile x_i compare solo in x_i^2 , quindi $\partial g(x)/\partial x_i = 2x_i$, e il vettore delle derivate è $2x$.
2. $f = \psi \circ g$ con $\psi(t) = \sqrt{t}$, derivabile per $t > 0$ con $\psi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Per $x \neq 0$ si ha $g(x) > 0$ e la regola della composta dà

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\|x\|_2^2}} 2x = \frac{x}{\|x\|_2}.$$

3. Nell'origine $f(h e_1) = |h|$, e il rapporto incrementale $|h|/h$ vale 1 per $h > 0$ e -1 per $h < 0$: la derivata parziale rispetto a x_1 non esiste, f non è derivabile in 0 e quindi, per la Sezione 2, non è differenziabile.

□

Le derivate parziali si possono anche fare direttamente: rispetto a x_1 , la derivata della radice per quella dell'argomento dà

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_1}{\|x\|_2},$$

e lo stesso per le altre variabili. Le componenti $x_i/\|x\|_2$ sono continue fuori dall'origine, e il teorema del differenziale totale conferma la differenziabilità su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Gli Esercizi 2 e 3 usano i due gradienti per scrivere l'iperpiano tangente al grafico di $1 + \|x\|_2^2$ e di $1 + \|x\|_2$.

7 Vettori di funzioni differenziabili

Definizione – Vettore di funzioni differenziabile

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è **differenziabile** in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste una matrice A , $m \times n$, tale che

$$\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x_0 + d) - g(x_0) - Ad\|}{\|d\|} = 0.$$

La matrice A si chiama **derivata prima** di g in x_0 .

È la definizione della Sezione 1 con un vettore al posto di un numero: $g(x_0 + d) - g(x_0)$ sta in $\mathbb{R}^m$, la direzione d in $\mathbb{R}^n$, quindi al posto del vettore a serve una matrice $m \times n$, che dipende da x_0 . Al numeratore c'è una norma perché la differenza è un vettore.

Proposizione – Differenziabilità e Jacobiana

Siano $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

1. Se g è differenziabile in x_0 , allora g è continua in x_0 , esiste la Jacobiana $J_g(x_0)$ e la derivata prima è $J_g(x_0)$.
2. Se J_g esiste in ogni punto di un intorno di x_0 ed è continua in x_0 , allora g è differenziabile in x_0 .

Dimostrazione

Per un vettore $v \in \mathbb{R}^m$ vale $|v_i| \leq \|v\| \leq |v_1| + \dots + |v_m|$: v tende a 0 se e solo se ogni componente tende a 0.

1. Quindi g è differenziabile in x_0 , con matrice A , se e solo se ogni componente g_i lo è, con vettore la riga i di A trasposta.
2. Punto 1: per la Sezione 2 ogni g_i è continua e la riga i di A è $\nabla g_i(x_0)^\top$, cioè la riga i di $J_g(x_0)$.
3. Punto 2: le righe di J_g sono i gradienti delle g_i ; per il teorema del differenziale totale ogni g_i è differenziabile in x_0 , e il passo 1 conclude.

□

Come per $m = 1$, l'esistenza della Jacobiana non basta: serve la differenziabilità, oppure la Jacobiana continua del punto 2, che si usa come criterio. Per $m = 1$ il punto 2 è il teorema del differenziale totale. Da qui la derivata prima si scrive $J_g(x_0)$, e vicino a x_0 il vettore di funzioni affini

$$L(x) = g(x_0) + J_g(x_0)(x - x_0)$$

approssima g con errore $o(\|x - x_0\|)$. Nel punto vale $L(x_0) = g(x_0)$.

Esempio – Jacobiana e approssimazione affine

Sia $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$g(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3x_3 + x_2x_3 \\ x_1x_3 - 12x_2^2 \\ x_1^4 + x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Le derivate parziali della componente i formano la riga i ; nella terza componente x_3 non compare, quindi l'ultimo elemento è 0:

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2x_3 & x_3 & 4x_1^3 + x_2 \\ x_3 & -24x_2 & x_1 \\ 4x_1^3 + x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli elementi sono polinomi, continui su $\mathbb{R}^3$: g è differenziabile ovunque. In $x_0 = (1, 0, 1)^T$:

$$g(x_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad J_g(x_0) = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e il vettore di funzioni affini che approssima g vicino a x_0 è

$$L(x) = g(x_0) + J_g(x_0) \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1 + x_2 + 4x_3 - 12 \\ x_1 + x_3 - 1 \\ 4x_1 + x_2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Qui la Jacobiana è simmetrica, ma non è la regola: in generale non è nemmeno quadrata. Questa g è il gradiente di una funzione di tre variabili (Esercizio 1), e allora J_g raccoglie derivate seconde.

8 Regole per vettori di funzioni

Proposizione – Mappe lineari e affini

Siano A una matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Le funzioni $h(x) = Ax$ e $g(x) = Ax + b$ sono differenziabili su tutto $\mathbb{R}^n$ e

$$J_h(x) = J_g(x) = A.$$

Dimostrazione

La componente i di Ax è $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$, con derivata parziale a_{ij} rispetto a x_j : la Jacobiana ha elemento a_{ij} in riga i e colonna j , cioè è A , costante e quindi continua. Il vettore costante b ha derivate nulle. $\square$

Per $m = 1$, con $A = c^\top$, è il gradiente c della funzione lineare $c^\top x$ (Sezione 4). In gradienti: $\nabla(Ax) = A^\top$.

Proposizione – Gradiente del prodotto scalare

Siano $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabili in x e $f(x) = g(x)^\top h(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x)h_i(x)$. Allora f è differenziabile in x e

$$\nabla f(x) = J_g(x)^\top h(x) + J_h(x)^\top g(x) = \nabla g(x) h(x) + \nabla h(x) g(x).$$

Dimostrazione

f è una somma di prodotti di funzioni differenziabili, quindi è differenziabile (Sezione 4).

1. Per la regola del prodotto, $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m h_i(x) \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \nabla h_i(x)$.
2. La prima somma combina le colonne $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x)$ con coefficienti $h_1(x), \dots, h_m(x)$: è il prodotto della matrice $\nabla g(x)$, che ha quelle colonne, per il vettore $h(x)$.
3. Allo stesso modo la seconda è $\nabla h(x) g(x)$, e $\nabla g = J_g^\top$, $\nabla h = J_h^\top$ (Capitolo 8).

□

Proposizione – Gradiente della forma quadratica

Sia Q una matrice $n \times n$, non necessariamente simmetrica. Allora

$$\nabla(x^\top Qx) = (Q + Q^\top)x.$$

Se Q è simmetrica, $\nabla(x^\top Qx) = 2Qx$ e $\nabla(\frac{1}{2}x^\top Qx) = Qx$.

Dimostrazione

$x^\top Qx$ è il prodotto scalare di $g(x) = x$ e $h(x) = Qx$, con $J_g = I$ e $J_h = Q$:

$$\nabla(x^\top Qx) = I^\top Qx + Q^\top x = (Q + Q^\top)x.$$

Con $Q = Q^\top$ si ha $Q + Q^\top = 2Q$.

□

Si ritrova la matrice simmetrica del Capitolo 7: $x^\top Qx = x^\top Sx$ con $S = \frac{1}{2}(Q + Q^\top)$, e $2Sx = (Q + Q^\top)x$. Per questo il fattore $\frac{1}{2}$ si mette spesso davanti alle forme quadratiche: il gradiente diventa Qx .

Teorema – Regola della catena

Siano $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile in x e $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenziabile in $g(x)$. Allora $f = h \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ è differenziabile in x e

$$J_f(x) = J_h(g(x)) J_g(x), \quad \nabla f(x) = \nabla g(x) \nabla h(g(x)).$$

La forma con le Jacobiane segue l'ordine della composizione, prima h e poi g ; quella con i gradienti si ottiene trasponendo, perché il trasposto di un prodotto scambia l'ordine:

$$\nabla f(x) = \left(J_h(g(x)) J_g(x) \right)^T = J_g(x)^T J_h(g(x))^T.$$

Le dimensioni tornano, ed è il primo controllo da fare:

Funzione	Jacobiana	Gradiente
$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	$J_g(x), m \times n$	$\nabla g(x), n \times m$
$h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$	$J_h(g(x)), p \times m$	$\nabla h(g(x)), m \times p$
$f = h \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$	$J_f(x), p \times n$	$\nabla f(x), n \times p$

Per $m = p = 1$, con $h = \psi$ funzione di una variabile, $J_\psi = \psi'$ e la regola dà $\nabla(\psi \circ g)(x) = \nabla g(x) \psi'(g(x))$: è la regola 3 della Sezione 4. Gli Esercizi 4 e 5 la usano con $p = 1$.

Riepilogo

- **Differenziabile:** $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$, cioè linearizzabile in x_0 .
- **Conseguenze:** differenziabile $\Rightarrow$ continua, derivabile e $Df(x_0, d) = \nabla f(x_0)^T d$; in $\mathbb{R}^n$ non vale il viceversa.
- **Iperpiano tangente:** $y = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, normale $(-\nabla f(x_0), 1)$.
- **Regole:** $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$, $\nabla(\psi \circ g) = \psi'(g) \nabla g$, $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$.
- **Differenziale totale:** derivate parziali (o J_g) in un intorno, continue in $x_0 \Rightarrow$ differenziabile in x_0 .
- **Norma:** $\nabla\|x\|_2^2 = 2x$; $\nabla\|x\|_2 = x/\|x\|_2$ per $x \neq 0$, non differenziabile in 0.
- **Vettore di funzioni:** $g(x) = g(x_0) + J_g(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$; $J_{Ax+b} = A$.
- **Regole vettoriali:** $J_{h \circ g}(x) = J_h(g(x)) J_g(x)$; $\nabla(g^T h) = J_g^T h + J_h^T g$; $\nabla(x^T Q x) = (Q + Q^T)x$.

9 Esercizi

Esercizio 1 – Una funzione di tre variabili

Data la funzione $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_3 + x_1 x_2 x_3 - 4x_2^3$ e il punto $x_0 = (1, 1, 2)^\top$:

1. calcolare il gradiente $\nabla f(x)$;
2. determinare la funzione affine che meglio approssima f vicino a x_0 ;
3. scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$;
4. dire se il piano tangente sta in $\mathbb{R}^2$ oppure in $\mathbb{R}^3$;
5. calcolare la derivata direzionale di f in x_0 lungo $d = (-1, 1, 0)^\top$.

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 2 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti B e M, esercizio 2

Sono assegnate le funzioni $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ \|x\|_2^2 \end{pmatrix}, \quad f(y_1, y_2) = y_1 + y_2, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e la funzione $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ composizione di f e g , cioè $h(x) = f(g(x))$.

1. Calcolare la Jacobiana $J_g(x)$ e il vettore $\nabla h(x)$.
2. Scrivere l'equazione che definisce il piano tangente al grafico di h nel punto x_0 , determinandone anche il vettore normale.

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 3 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti C e N, esercizio 2

Sono assegnate le funzioni $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ \|x\|_2 \end{pmatrix}, \quad f(y_1, y_2) = y_1 + y_2, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e la funzione $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ composizione di f e g , cioè $h(x) = f(g(x))$.

1. Calcolare la Jacobiana $J_g(x)$ e il vettore $\nabla h(x)$.

2. Scrivere l'equazione che definisce il piano tangente al grafico di h nel punto x_0 , determinandone anche il vettore normale.

Soluzione a pagina 14 →

Esercizio 4 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti J e U, esercizio 2

Sono assegnate le funzioni $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + \|x\|_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad f(y_1, y_2) = y_1 y_2, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e la funzione $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ composizione di f e g , cioè $h(x) = f(g(x))$.

1. Calcolare la Jacobiana $J_g(x)$ e il vettore $\nabla h(x)$.
2. Scrivere l'equazione che definisce il piano tangente al grafico di h nel punto x_0 , determinandone anche il vettore normale.

Soluzione a pagina 14 →

Esercizio 5 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti D e O, esercizio 2

Sono assegnate le funzioni $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix}, \quad f(y_1, y_2) = \|(y_1, y_2)\|_2^3, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e la funzione $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ composizione di f e g , cioè $h(x) = f(g(x))$.

1. Calcolare la Jacobiana $J_g(x)$ e il vettore $\nabla h(x)$.
2. Scrivere l'equazione che definisce il piano tangente al grafico di h nel punto x_0 , determinandone anche il vettore normale.

Soluzione a pagina 15 →

10 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Una funzione di tre variabili

1. Derivando rispetto a ciascuna variabile:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3x_3 + x_2x_3 \\ x_1x_3 - 12x_2^2 \\ x_1^4 + x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

È il vettore g dell'esempio della Sezione 7. Le componenti sono polinomi, continue su $\mathbb{R}^3$: per il teorema del differenziale totale f è differenziabile ovunque.

2. $f(x_0) = 2 + 2 - 4 = 0$ e $\nabla f(x_0) = (10, -10, 2)^\top$, quindi

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top (x - x_0) = 10(x_1 - 1) - 10(x_2 - 1) + 2(x_3 - 2) \\ &= 10x_1 - 10x_2 + 2x_3 - 4. \end{aligned}$$

3. Il piano tangente è il grafico di L : $y = 10x_1 - 10x_2 + 2x_3 - 4$, con normale $(-10, 10, -2, 1)^\top$.
4. In nessuno dei due: le variabili sono x_1, x_2, x_3, y , quindi è un iperpiano di $\mathbb{R}^4$.
5. f è differenziabile, quindi $Df(x_0, d) = \nabla f(x_0)^\top d = -10 - 10 + 0 = -20$.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti B e M, esercizio 2

1. La prima componente di g è costante, con gradiente nullo; la seconda è $\|x\|_2^2$, con gradiente $2x$. Le righe della Jacobiana sono i gradienti trasposti:

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Poi $h(x) = 1 + \|x\|_2^2$, somma di una costante e di una funzione differenziabile su $\mathbb{R}^3$, quindi differenziabile ovunque, con

$$\nabla h(x) = 2x = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

2. In x_0 : $h(x_0) = 1 + 1 + 1 + 4 = 7$ e $\nabla h(x_0) = (2, 2, 4)^\top$. Il piano tangente al grafico, un iperpiano di $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, y) , è

$$y = 7 + 2(x_1 - 1) + 2(x_2 - 1) + 4(x_3 - 2) = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5,$$

con vettore normale

$$\begin{pmatrix} -\nabla h(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti C e N, esercizio 2

1. La prima componente di g è costante; la seconda è la norma, con gradiente $x/\|x\|_2$ per $x \neq 0$, mentre nell'origine non è derivabile. Per $x \neq 0$:

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_1}{\|x\|_2} & \frac{x_2}{\|x\|_2} & \frac{x_3}{\|x\|_2} \end{pmatrix}.$$

Poi $h(x) = 1 + \|x\|_2$, differenziabile in ogni $x \neq 0$, con

$$\nabla h(x) = \frac{x}{\|x\|_2}.$$

2. In x_0 : $\|x_0\|_2 = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$, quindi $h(x_0) = 1 + \sqrt{6}$ e $\nabla h(x_0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^\top$. Il piano tangente al grafico, un iperpiano di $\mathbb{R}^4$, è

$$y = 1 + \sqrt{6} + \frac{(x_1 - 1) + 2(x_2 - 2) + (x_3 - 1)}{\sqrt{6}} = 1 + \frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{\sqrt{6}},$$

perché $\sqrt{6} - 6/\sqrt{6} = 0$. Il vettore normale è

$$\begin{pmatrix} -\nabla h(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 11](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti J e U, esercizio 2

1. La norma è differenziabile per $x \neq 0$, con gradiente $x/\|x\|_2$; la seconda componente è lineare. Per $x \neq 0$:

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x_1}{\|x\|_2} & \frac{x_2}{\|x\|_2} & \frac{x_3}{\|x\|_2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f è un polinomio, con $\nabla f(y) = (y_2, y_1)^\top$. Per la regola della catena h è differenziabile in ogni $x \neq 0$ e $\nabla h(x) = J_g(x)^\top \nabla f(g(x))$, con $\nabla f(g(x)) = (x_2 + x_3, x_1 + \|x\|_2)^\top$:

$$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + \frac{x_1(x_2 + x_3)}{\|x\|_2} \\ \frac{x_2(x_2 + x_3)}{\|x\|_2} + x_1 + \|x\|_2 \\ \frac{x_3(x_2 + x_3)}{\|x\|_2} + x_1 + \|x\|_2 \end{pmatrix}.$$

2. In x_0 : $\|x_0\|_2 = \sqrt{3}$, $g(x_0) = (1 + \sqrt{3}, 2)^\top$, $h(x_0) = 2 + 2\sqrt{3}$ e

$$\nabla h(x_0) = \begin{pmatrix} 2 + 2/\sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} + 2/\sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} + 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\sqrt{3}/3 \\ 1 + 5\sqrt{3}/3 \\ 1 + 5\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Il piano tangente, un iperpiano di $\mathbb{R}^4$, è

$$y = 2 + 2\sqrt{3} + \left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(x_1 - 1) + \left(1 + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)(x_2 + x_3 - 2),$$

con vettore normale $(-\nabla h(x_0), 1)$.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 12](#)

Soluzione dell'Esercizio 5 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti D e O, esercizio 2

1. Le componenti di g sono polinomi:

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}.$$

$f(y) = (y_1^2 + y_2^2)^{3/2}$ ha derivata parziale $\frac{3}{2}(y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \cdot 2y_1 = 3\|y\|_2 y_1$ rispetto a y_1 , e lo stesso per y_2 ; in $y = 0$ il rapporto incrementale $|t|^3/t$ tende a 0, come la formula. Quindi $\nabla f(y) = 3\|y\|_2 y$, continuo su $\mathbb{R}^2$: f è differenziabile ovunque. Per la regola della catena:

$$\nabla h(x) = J_g(x)^\top \nabla f(g(x)) = 3\|g(x)\|_2 J_g(x)^\top g(x) = 3\|g(x)\|_2 \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1^2 x_2 + x_2 x_3^2 \\ x_2^2 x_3 \end{pmatrix},$$

con $\|g(x)\|_2 = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2}$.

2. In x_0 : $g(x_0) = (2, 1)^\top$, $\|g(x_0)\|_2 = \sqrt{5}$, $h(x_0) = 5\sqrt{5}$ e $\nabla h(x_0) = 3\sqrt{5} (2, 5, 1)^\top$.

Il piano tangente, un iperpiano di $\mathbb{R}^4$, è

$$\begin{aligned}y &= 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5}(2(x_1 - 2) + 5(x_2 - 1) + (x_3 - 1)) \\ &= 3\sqrt{5}(2x_1 + 5x_2 + x_3) - 25\sqrt{5},\end{aligned}$$

con vettore normale $(-6\sqrt{5}, -15\sqrt{5}, -3\sqrt{5}, 1)^\top$.

[*← Torna all'Esercizio 5, pagina 12*](#)