

Formulario di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Modelli di programmazione lineare

Funzione lineare	$c_1x_1 + \dots + c_nx_n$: obiettivo e primo membro dei vincoli ($\leq, =, \geq$)
Semipiano	$a_1x + a_2y \leq \beta$ (o $\geq \beta$) $(0,0)$ sta in $\leq \beta$ se $\beta > 0$, in $\geq \beta$ se $\beta < 0$
Retta di livello	$c_1x + c_2y = k$ al variare di k parallele max: k cresce finché la retta tocca la regione

Norme e intorni in $\mathbb{R}^n$

Prodotto scalare	$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ $x^T x \geq 0, \quad x^T x = 0 \iff x = 0$
Norme	$\ x\ _2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x^T x}$ $\ x\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $ $\ x\ _\infty = \max\{ x_1 , \dots, x_n \}$ $\ x\ _p = \left(\sum_{i=1}^n x_i ^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \text{ intero}$
Proprietà della norma	(i) $\ x\ \geq 0$ (ii) $\ x\ = 0 \iff x = 0$ (iii) $\ x + y\ \leq \ x\ + \ y\ $ (iv) $\ \alpha x\ = \alpha \ x\ $
Insieme $\ x\ \leq 1$	in $\mathbb{R}^2$: $\ x\ _1 \leq 1$ rombo $\ x\ _2 \leq 1$ cerchio $\ x\ _\infty \leq 1$ quadrato
Intorno sferico	$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ y - x\ < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$
Intorno di ∞	$\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ $B(\infty, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ y\ > \varepsilon\} \cup \{\infty\}$
Cauchy-Schwarz	$ x^T y \leq \ x\ _2 \ y\ _2$ $ x^T y = \ x\ _2 \ y\ _2 \iff y = \alpha x \text{ oppure } x = \alpha y, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
Angolo e ortogonalità	$\cos \theta = \frac{x^T y}{\ x\ _2 \ y\ _2}, \quad \theta \in [0, \pi], \quad x, y \neq 0$ ortogonali: $x^T y = 0$

Punti di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$

Punto interno	$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq E$; interno $\overset{\circ}{E} = \text{int}(E)$
Punto esterno	$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq \text{co}(E)$
Punto di frontiera	$\forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ e $B(x, \varepsilon) \cap \text{co}(E) \neq \emptyset$; frontiera ∂E
Partizione di $\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n = \overset{\circ}{E} \cup \text{int}(\text{co}(E)) \cup \partial E$, a due a due disgiunti $\partial E = \partial \text{co}(E)$
Accumulazione	$\forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset$; derivato $\mathcal{D}(E)$
Punto isolato	$x \in E \setminus \mathcal{D}(E)$, cioè $\exists \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap E = \emptyset$
Isolati e derivato	isolati $\subseteq \partial E \cap E$ $\mathcal{D}(E) = \overset{\circ}{E} \cup (\partial E \setminus \{\text{isolati}\})$

Chiusura $\overline{E} = E \cup \partial E = \overset{\circ}{E} \cup \partial E \quad \overset{\circ}{E} \subseteq E \subseteq \overline{E} \quad \partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$

Aperti, chiusi e compatti

Aperto e chiuso E aperto $\iff E = \overset{\circ}{E} \quad E$ chiuso $\iff \text{co}(E)$ aperto
 $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$: aperti e chiusi

Criteri con ∂E E aperto $\iff E \cap \partial E = \emptyset$
 E chiuso $\iff \partial E \subseteq E \iff \mathcal{D}(E) \subseteq E \iff E = \overline{E}$

Unioni, intersezioni A_i aperti: $\bigcup_{i \in I} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^k A_i$ aperti
 C_i chiusi: $\bigcap_{i \in I} C_i$ e $\bigcup_{i=1}^k C_i$ chiusi

Limitato, compatto E limitato: $\exists \varepsilon > 0 : E \subseteq B(0, \varepsilon)$, cioè $\|x\| < \varepsilon \forall x \in E$
 E compatto $\iff$ chiuso e limitato

Funzioni di n variabili

Immagine e grafico $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f(D) = \{f(x) : x \in D\}$
 $G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Contorno di livello $C_\alpha = \{x \in D : f(x) = \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^n$

Dominio naturale $\sqrt{g} : g \geq 0 \quad 1/g : g \neq 0 \quad \log g : g > 0 \quad \arccos g : -1 \leq g \leq 1$

Successioni in $\mathbb{R}^n$

Successione limitata $\|x_k\| \leq M \quad \forall k, M > 0 \quad \iff$ ogni componente $\{(x_k)_i\}$ limitata

Sottosuccessione $y_k = x_{i_k}, i_1 < i_2 < i_3 < \dots \quad \{x_k\}_K, K = \{i_1, i_2, \dots\}$ infinito

Ricorsiva, legge $f \quad x_k = \begin{cases} a_k & k < m \\ f(k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}) & k \geq m \end{cases} \quad a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ assegnati

Newton, zero di $f \quad x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad \text{con } f'(x_{k-1}) \neq 0$
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cerca x con $f(x) = 0$

Limiti: definizione unificata

Reali estesi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
 $B(+\infty, M) = \{x \in \mathbb{R}^* : x > M\} \quad B(-\infty, M) = \{x \in \mathbb{R}^* : x < -M\}$

Intorno $\mathcal{U}(x_0)$ aperto con $B(x_0, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}(x_0)$ per un $\varepsilon > 0$

Limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \forall \mathcal{U}(\ell) \exists \mathcal{N}(x_0) : x \in (\mathcal{N}(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(\ell)$
 $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}_*^n$ di accumulazione per $D, \ell \in \mathbb{R}^*$

Limite in $\mathbb{R}^n \quad \|x - x_0\|$ al posto di $|x - x_0| \quad x_0 = \infty : \|x\| > M$ al posto di $x > M$

Limite: i casi in $\mathbb{R}$

	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell = \pm\infty$
$x_0 \in \mathbb{R}$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0:$ $x \in D, 0 < x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow f(x) - \ell < \varepsilon$	$\forall N > 0 \exists \delta_N > 0:$ $x \in D, 0 < x - x_0 < \delta_N$ $\Rightarrow f(x) > N \quad (-\infty: f(x) < -N)$
$x_0 = +\infty$	$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0:$ $x \in D, x > M$ $\Rightarrow f(x) - \ell < \varepsilon$	$\forall N > 0 \exists M_N > 0:$ $x \in D, x > M_N$ $\Rightarrow f(x) > N \quad (-\infty: f(x) < -N)$
$x_0 = -\infty$	$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0:$ $x \in D, x < -M$ $\Rightarrow f(x) - \ell < \varepsilon$	$\forall N > 0 \exists M_N > 0:$ $x \in D, x < -M_N$ $\Rightarrow f(x) > N \quad (-\infty: f(x) < -N)$