

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Capitolo 1: Modelli di programmazione matematica

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Modello e algoritmo · Variabili, vincoli, obiettivo · Assegnamento
Calendario sportivo · Ammissibilità · Zaino · Trasporto · Variabili intere

Indice

1	Modello e algoritmo	1
2	Il problema di assegnamento	2
3	Il calendario sportivo	2
3.1	Vincoli incompatibili	3
4	La scelta dei relatori: il problema dello zaino	4
5	Il problema del trasporto	5
6	Struttura del modello e algoritmi	6
7	Esercizi	7
8	Soluzioni	8

1 Modello e algoritmo

Definizione – Modello di programmazione matematica

Un **modello di programmazione matematica** (o di ottimizzazione) è formato da:

- le **variabili di decisione** $x_1, \dots, x_n$: le quantità che l'algoritmo sceglie;
- i **vincoli**: uguaglianze o disuguaglianze fra le variabili che descrivono le restrizioni del problema;
- uno o più **obiettivi**: funzioni delle variabili da minimizzare o massimizzare.

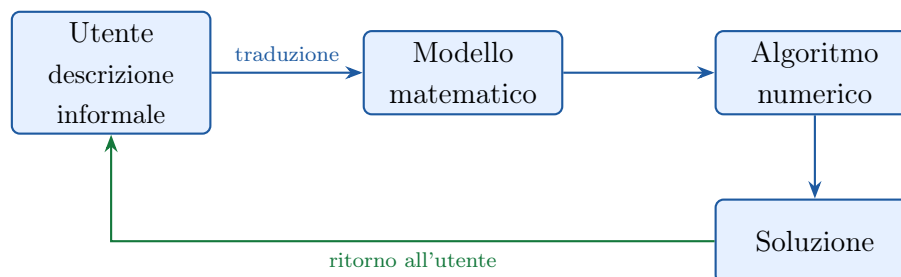
Le grandezze note, su cui non si può influire, sono i **parametri assegnati**.

Con $x = (x_1, \dots, x_n)$ e un solo obiettivo:

$$\min_x f(x) \quad \text{oppure} \quad \max_x f(x) \quad \text{con } x \text{ che soddisfa i vincoli.}$$

Un parametro è un dato (il tempo di addestramento di un ingegnere, il costo di un relatore); una variabile di decisione è una scelta (assegnare o no quell'ingegnere, invitare o no quel relatore). Distinguerli è il passaggio più delicato per chi comincia.

Il **modello** formula il problema; l'**algoritmo numerico** ne calcola una soluzione. Sono oggetti distinti.



La traduzione in modello è spesso la parte più difficile. L'algoritmo può essere uno già noto, di cui però vanno conosciute le proprietà matematiche, oppure uno sviluppato ad hoc.

Osservazione – Non partire dalla soluzione

L'errore tipico è costruire subito una soluzione a mano (*“questo ingegnere su questo progetto costa poco, intanto lo metto qui”*). Prima si scrive il modello; la soluzione, se esiste, la trova l'algoritmo. Un caso in cui la scelta a mano sbaglia è nell'Esercizio 1.

2 Il problema di assegnamento

Definizione – Problema di assegnamento

Un'azienda ha 30 ingegneri e 30 progetti aperti; t_{ij} è il **tempo di addestramento** dell'ingegnere i sul progetto j . Ogni ingegnere va a uno e un solo progetto, ogni progetto a uno e un solo ingegnere, con tempo complessivo minimo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^{30} t_{ij} x_{ij} \\ \text{con} \quad & \sum_{j=1}^{30} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, 30 \quad (\text{un solo progetto per ogni ingegnere}) \\ & \sum_{i=1}^{30} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 30 \quad (\text{un solo ingegnere per ogni progetto}) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, 30. \end{aligned}$$

Parametri. I tempi t_{ij} sono dati: se l'ingegnere i sul progetto j richiede quattro mesi, non si può decidere che ne richieda tre.

Variabili. L'unica scelta è se associare o no l'ingegnere i al progetto j :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'ingegnere } i \text{ è assegnato al progetto } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sono **binarie**: $x_{ij} = 0, 1$ non ha significato, perché un ingegnere o è assegnato a un progetto o non lo è.

Vincoli. Fissato l'ingegnere i , esattamente una delle x_{ij} vale 1, quindi la loro somma sui progetti vale 1; lo stesso, fissato il progetto j , per la somma sugli ingegneri. Sono $30 + 30 = 60$ uguaglianze sulle 900 variabili.

Obiettivo. $t_{ij} x_{ij}$ vale t_{ij} se l'ingegnere i è assegnato al progetto j e 0 altrimenti; il tempo complessivo è la somma su tutti gli ingegneri e tutti i progetti.

3 Il calendario sportivo

Un campionato ha 16 squadre. Il girone di ritorno è quello di andata con casa e trasferta invertite, quindi basta costruire l'andata: 15 giornate a date fissate. Le variabili hanno tre indici, due squadre e una giornata:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se la squadra } i \text{ gioca in casa contro la squadra } j \text{ alla giornata } k, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $i, j = 1, \dots, 16$, $i \neq j$, e $k = 1, \dots, 15$.

Vincoli. Ogni richiesta del calendario diventa un vincolo sulle x_{ijk} ; in un caso reale sono un centinaio. Se la squadra 1 non può giocare in casa alla terza giornata:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{16} x_{1j3} = 0.$$

La somma conta le partite casalinghe della squadra 1 alla giornata 3: imporla nulla significa che quel giorno gioca in trasferta.

Due vincoli valgono in ogni girone all'italiana:

$$\sum_{j \neq i} (x_{ijk} + x_{jik}) = 1 \quad i = 1, \dots, 16, \quad k = 1, \dots, 15 \quad (\text{una partita per giornata}),$$

$$\sum_{k=1}^{15} (x_{ijk} + x_{jik}) = 1 \quad 1 \leq i < j \leq 16 \quad (\text{ogni coppia si incontra una volta}).$$

Obiettivi. Possono essere più d'uno; si **scalarizzano**, cioè si combinano in un'unica funzione da ottimizzare.

3.1 Vincoli incompatibili

Definizione – Soluzione ammissibile

Una scelta delle variabili che soddisfa *tutti* i vincoli è una **soluzione ammissibile**; il loro insieme è l'**insieme ammissibile**. Se è vuoto, i vincoli sono incompatibili e il problema è **inammissibile**: non ammette soluzione.

Con molte richieste può succedere che nessun calendario le rispetti tutte. Lo segnala l'algoritmo; un algoritmo migliore non serve, perché il problema va riformulato indebolendo qualche richiesta.

4 La scelta dei relatori: il problema dello zaino

Definizione – Problema dello zaino (knapsack)

Per un convegno si ha un **budget** b e N relatori possibili. Il relatore i attrae circa c_i partecipanti e ha un **costo di ingaggio** a_i (almeno viaggio e albergo). Si sceglie chi invitare per avere il maggior numero di partecipanti senza superare il budget:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^N c_i x_i \\ \text{con} \quad & \sum_{i=1}^N a_i x_i \leq b \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Variabili. Su b , N , c_i e a_i non si può influire; si decide soltanto se ingaggiare il relatore i ($x_i = 1$) o no ($x_i = 0$).

Vincolo e obiettivo. $a_i x_i$ vale a_i se il relatore i è ingaggiato e 0 altrimenti, quindi $\sum_i a_i x_i$ è la spesa totale; allo stesso modo $\sum_i c_i x_i$ è il numero atteso di partecipanti.

Il nome viene da uno zaino di capacità b da riempire con oggetti di ingombro a_i e valore c_i . È un problema classico e molto frequente nelle applicazioni. Un'istanza piccola, risolta per enumerazione, è nell'Esercizio 1.

Osservazione – Modello corretto, tempi di calcolo

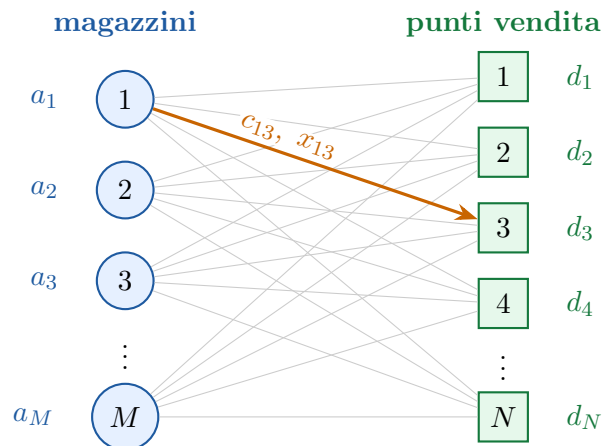
Con N relatori le scelte possibili sono 2^N : con $N = 30$ più di un miliardo. Un modello corretto non basta: se l'applicazione richiede una risposta in un secondo e l'algoritmo impiega due ore, bisogna intervenire sia sul modello sia sull'algoritmo.

5 Il problema del trasporto

Definizione – Problema del trasporto

Un'azienda ha M magazzini e N punti vendita. Il magazzino i ha **capacità** a_i , il punto vendita j ha **domanda** d_j , spostare un'unità da i a j costa c_{ij} . Si soddisfano le domande, nel rispetto delle capacità, con costo complessivo minimo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} \\ \text{con} \quad & \sum_{j=1}^N x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, M \quad (\text{capacità dei magazzini}) \\ & \sum_{i=1}^M x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{domanda dei punti vendita}) \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$



Variabili. La decisione non è più sì/no ma *quanto*: x_{ij} è la **quantità** spedita dal magazzino i al punto vendita j . Il primo vincolo viene dal significato stesso: una quantità non è negativa, $x_{ij} \geq 0$.

Vincoli. Ciò che esce dal magazzino i , $\sum_j x_{ij}$, non supera la capacità a_i . Ciò che entra nel punto vendita j , $\sum_i x_{ij}$, è esattamente la domanda d_j .

Obiettivo. $c_{ij} x_{ij}$ è la spesa per il trasporto da i a j (nulla se $x_{ij} = 0$); il costo complessivo è la doppia somma.

Osservazione – Beni divisibili e indivisibili

La natura del bene decide se servono **vincoli di interezza**. Non si trasportano 0,7 automobili: si aggiunge $x_{ij} \in \mathbb{Z}$, cioè $x_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Per un bene continuo, come il grano, x_{ij} è un qualsiasi reale non negativo.

6 Struttura del modello e algoritmi

Le classi di algoritmi applicabili dipendono dalla struttura del modello:

- la **natura delle variabili**: continue (reali), discrete (interi), binarie (0 o 1);
- la **natura delle funzioni** in vincoli e obiettivo: lineari o non lineari, convesse o non convesse.

Conoscere questa struttura serve a usare bene gli algoritmi esistenti e a progettarne di specifici.

Le classi principali di problemi:

- **ottimizzazione non lineare**: funzioni non lineari; il caso più generale e più difficile;
- **ottimizzazione lineare**: tutte le funzioni lineari, con semplificazioni matematiche e algoritmiche;
- **programmazione lineare intera**: funzioni lineari, alcune variabili intere.

Senza vincoli di interezza si parla di **ottimizzazione continua**.

Nota – Interezza e complessità

Con variabili intere o binarie si applica una classe di algoritmi, con variabili continue un'altra, e il problema intero è in genere **molto più difficile**. La difficoltà si riconosce già dalla formulazione. Fa eccezione l'assegnamento: nonostante le variabili binarie, si risolve in modo molto efficiente.

problema	variabili	obiettivo
assegnamento	binarie x_{ij}	minimo tempo di addestramento
calendario sportivo	binarie x_{ijk}	uno o più obiettivi, scalarizzati
zaino	binarie x_i	massimo numero di partecipanti
trasporto	$x_{ij} \geq 0$, reali o interi	minimo costo di trasporto

Riepilogo

- Il modello formula il problema, l'algoritmo lo risolve: prima il modello.
- Modello: variabili di decisione, vincoli, uno o più obiettivi; i dati sono parametri assegnati.
- Inammissibile: nessuna scelta delle variabili soddisfa tutti i vincoli; si riformula.
- Assegnamento: $\min \sum_{i,j} t_{ij}x_{ij}, \sum_j x_{ij} = 1, \sum_i x_{ij} = 1, x_{ij} \in \{0,1\}$.
- Calendario: $x_{ijk} = 1$ se i ospita j alla giornata k .
- Zaino: $\max \sum_i c_i x_i, \sum_i a_i x_i \leq b, x_i \in \{0,1\}$.
- Trasporto: $\min \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}, \sum_j x_{ij} \leq a_i, \sum_i x_{ij} = d_j, x_{ij} \geq 0$.
- Variabili intere: problema in genere molto più difficile; l'assegnamento no.

7 Esercizi

Esercizio 1 – Un'istanza piccola dello zaino

Budget $b = 8$ (migliaia di euro) e quattro relatori:

relatore i	1	2	3	4
partecipanti c_i	1000	600	550	100
costo a_i	6	4	4	1

Confrontare la scelta che ingaggia per primo il relatore più attraente con la soluzione ottima.

Soluzione a pagina 8 →

8 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Un'istanza piccola dello zaino

Ingaggiando prima il relatore 1 (spesa 6) non restano soldi per 2 o 3, solo per 4: $x = (1, 0, 0, 1)$, spesa 7, partecipanti 1100.

Delle $2^4 = 16$ scelte ne rispettano il budget 9: l'insieme vuoto, i quattro relatori da soli, e le coppie $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$. La migliore è $\{2, 3\}$: $x = (0, 1, 1, 0)$, spesa $4 + 4 = 8$, partecipanti $600 + 550 = 1150$. La scelta a mano non è quella ottima.

[*← Torna all'Esercizio 1, pagina 7*](#)