

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Capitolo 12: Jacobiana, Hessiana e metodo di Newton per i sistemi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Funzioni a valori vettoriali · Matrice jacobiana · Metodo di Newton per i
sistemi
Matrice hessiana · Funzioni due volte differenziabili · Classi C^0 , C^1 , C^2

Indice

1	Funzioni a valori vettoriali e matrice jacobiana	1
2	Funzioni vettoriali differenziabili	1
3	Il metodo di Newton per i sistemi	2
4	La matrice hessiana	4
5	Funzioni due volte differenziabili	5
6	Esercizi	6
7	Soluzioni	8

1 Funzioni a valori vettoriali e matrice jacobiana

Una funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ associa a ogni $x \in \mathbb{R}^n$ un vettore di $\mathbb{R}^m$. Ogni componente è una funzione a valori scalari $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}.$$

Se esistono i gradienti $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x) \in \mathbb{R}^n$, si usano tutti insieme in una matrice.

Definizione – Matrice jacobiana

Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con le derivate parziali delle componenti in x . La **matrice jacobiana** di g in x ha per righe i gradienti trasposti:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x)^\top \\ \vdots \\ \nabla g_m(x)^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Ha tante righe quante sono le componenti di g , e tante colonne quante sono le variabili. Per $m = 1$ è il gradiente trasposto.

Esempio – Una jacobiana 3×2

Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2^2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1^3 - 4x_2 \end{pmatrix}, \quad J(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 & 2x_1^2 x_2 \\ 1 & 1 \\ 3x_1^2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ogni riga è il gradiente di una componente: tre righe per tre componenti, due colonne per due variabili.

2 Funzioni vettoriali differenziabili

Definizione – Funzione vettoriale differenziabile

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è **differenziabile** in x se esiste una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\|g(x+d) - g(x) - A d\|}{\|d\|} = 0.$$

È la definizione del Capitolo 11 con una matrice al posto del vettore a , perché Ad deve essere un vettore di $\mathbb{R}^m$. Per $m = 1$, $A = a^\top$ e si ritrova quella definizione.

Proposizione – Differenziabilità e jacobiana

Siano $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

1. **Condizione necessaria.** Se g è differenziabile in x , esiste $J(x)$ e la matrice della definizione è $A = J(x)$.
2. **Condizione sufficiente.** Se J esiste nei punti vicini a x ed è continua in x , allora g è differenziabile in x .

Sono le condizioni del Capitolo 11, con la jacobiana al posto del gradiente. Per una g differenziabile

$$\boxed{g(x+d) = g(x) + J(x)d + \gamma(x,d)} \quad \text{con} \quad \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(x,d)\|}{\|d\|} = 0.$$

La parte lineare $J(x)d$ approssima g vicino a x , e il resto va a zero più rapidamente di $\|d\|$.

3 Il metodo di Newton per i sistemi

Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con tante componenti quante variabili. Si cerca $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$g(\bar{x}) = 0,$$

cioè una soluzione del sistema di n equazioni non lineari $g_1(x) = 0, \dots, g_n(x) = 0$ in n incognite. Per $n = 1$ è il problema del Capitolo 7.

Si procede come in una variabile. Si sostituisce g con la sua parte lineare in x_0 e si sceglie x_1 dove questa si annulla:

$$g(x_0) + J(x_0)(x_1 - x_0) = 0.$$

È un sistema lineare $n \times n$ in x_1 . L'ipotesi $f'(x_0) \neq 0$ del Capitolo 7 diventa $J(x_0)$ invertibile, e allora $x_1 = x_0 - J(x_0)^{-1}g(x_0)$. Serve $m = n$: con $m \neq n$ la jacobiana non è quadrata e non ha inversa.

Definizione – Metodo di Newton per i sistemi

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il **metodo di Newton** calcola, per $k = 0, 1, 2, \dots$ e finché $J(x_k)$ è invertibile,

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}g(x_k).$$

Per $n = 1$, $J(x_k) = g'(x_k)$ e si ritrova $x_{k+1} = x_k - g(x_k)/g'(x_k)$. In pratica non si calcola l'inversa: si risolve il sistema lineare $J(x_k)s = -g(x_k)$ e si pone $x_{k+1} = x_k + s$. Ogni

iterazione calcola le n^2 derivate parziali di $J(x_k)$ e risolve un sistema $n \times n$, e con n grande è il costo principale.

Esempio – Un sistema di due equazioni

Si cerca $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ con

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad J(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una soluzione è $\bar{x} = (1, 1)$, dove $\det J(\bar{x}) = -4 \neq 0$. Da $x_0 = (2, 0)$:

k	x_k	$g(x_k)$	$\ g(x_k)\ _2$
0	(2, 0)	(2, 2)	2,83
1	(1,5, 1,5)	(2,5, 0)	2,5
2	(1,0833, 1,0833)	(0,3472, 0)	0,347
3	(1,0032, 1,0032)	(0,0128, 0)	0,0128
4	(1,000005, 1,000005)	(0,00002, 0)	0,00002

Il primo passo risolve $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} s = -\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, cioè $s = (-0,5, 1,5)$.

Teorema – Convergenza locale del metodo di Newton

Siano

- $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con jacobiana J continua su un aperto che contiene $\bar{x}$;
- $g(\bar{x}) = 0$ e $J(\bar{x})$ invertibile.

Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che, se $\|x_0 - \bar{x}\| < \varepsilon$, tutti i punti x_k del metodo di Newton sono definiti, stanno in $\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x})$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}.$$

È il teorema del Capitolo 7 in $\mathbb{R}^n$, e il risultato è ancora locale. Il punto iniziale adatto non si conosce, perché richiede di conoscere $\bar{x}$. Si usa la strategia multi-start del Capitolo 7, con punti iniziali casuali in tutto $\mathbb{R}^n$.

Definizione – Criterio d'arresto

Fissata una **tolleranza** $\varepsilon > 0$, per esempio 10^{-9} , il metodo si ferma al primo k con

$$\|g(x_k)\| \leq \varepsilon.$$

È il criterio naturale, perché si cerca un punto in cui il vettore g si annulla, e in precisione finita lo zero esatto non si raggiunge. Un'alternativa è fermarsi quando $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon$.

Nelle ipotesi del teorema il criterio è soddisfatto dopo un numero finito di iterazioni. Infatti g è differenziabile, quindi continua in $\bar{x}$, e $x_k \rightarrow \bar{x}$. Per il teorema ponte (Capitolo 9) $g(x_k) \rightarrow g(\bar{x}) = 0$, quindi da un certo k in poi $\|g(x_k)\| \leq \varepsilon$.

4 La matrice hessiana

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con le derivate parziali in ogni punto. Il gradiente associa a ogni x il vettore $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$, quindi è una funzione $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a valori vettoriali, e ha una matrice jacobiana.

Definizione – Matrice hessiana

La **matrice hessiana** di f in x è la jacobiana del gradiente:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

È quadrata, perché ∇f ha n componenti e n variabili. Le sue entrate sono le **derivate seconde**. La riga i è il gradiente di $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, quindi nell'entrata (i, j) si deriva prima rispetto a x_i e poi rispetto a x_j :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x).$$

Con $i \neq j$ si parla di **derivate miste**.

Esempio – Una hessiana 2×2

Sia $f(x) = x_1^2 x_2^3$. Allora

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^3 \\ 3x_1^2 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

1. **Prima riga**, gradiente di $2x_1 x_2^3$: $(2x_2^3, 6x_1 x_2^2)$.
2. **Seconda riga**, gradiente di $3x_1^2 x_2^2$: $(6x_1 x_2^2, 6x_1^2 x_2)$.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2x_2^3 & 6x_1 x_2^2 \\ 6x_1 x_2^2 & 6x_1^2 x_2 \end{pmatrix}.$$

Le due derivate miste coincidono e la matrice è simmetrica. Non è un caso: lo garantisce la proposizione della Sezione 5. Un secondo calcolo è nell'Esercizio 1.

5 Funzioni due volte differenziabili

Definizione – Funzione due volte differenziabile

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è **due volte differenziabile** in x se è differenziabile in x ed esiste una matrice $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$f(x + d) = f(x) + \nabla f(x)^\top d + \frac{1}{2} d^\top H d + \beta(x, d) \quad \text{con} \quad \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\beta(x, d)}{\|d\|^2} = 0.$$

La differenziabilità approssima f con una funzione affine di d . Qui l'approssimazione è quadratica in d (Capitolo 6), e il resto va a zero più rapidamente di $\|d\|^2$, quindi l'approssimazione è migliore.

Proposizione – Due volte differenziabile e hessiana

Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

1. **Condizione necessaria.** Se f è due volte differenziabile in x , allora ∇f esiste ed è continuo in x , esiste $\nabla^2 f(x)$, è simmetrica e $H = \nabla^2 f(x)$.
2. **Condizione sufficiente.** Se $\nabla^2 f$ esiste nei punti vicini a x ed è continua in x , allora f è due volte differenziabile in x .

Per una funzione due volte differenziabile quindi

$$f(x + d) = f(x) + \nabla f(x)^\top d + \frac{1}{2} d^\top \nabla^2 f(x) d + o(\|d\|^2)$$

e le derivate miste coincidono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Le tre proposizioni (gradiente, jacobiana, hessiana) hanno la stessa forma:

	condizione necessaria	condizione sufficiente
f differenziabile	∇f esiste	∇f continuo
g differenziabile	J esiste	J continua
f due volte differenziabile	$\nabla^2 f$ esiste ed è simmetrica	$\nabla^2 f$ continua

Definizione – Classi C^0 , C^1 , C^2

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- $f \in C^0(D)$ se f è continua su D .
- $f \in C^1(D)$ se il gradiente esiste ed è continuo su D .
- $f \in C^2(D)$ se anche la hessiana esiste ed è continua su D .

Per le condizioni sufficienti, una funzione di $C^1(D)$ è differenziabile e una di $C^2(D)$ è due volte differenziabile in ogni punto di D , con hessiana simmetrica. Gli Esercizi 2, 3 e 4 vengono da prove d'esame.

Riepilogo

- **Jacobiana:** $J(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con i gradienti delle componenti di $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ per righe.
- **g differenziabile:** $g(x + d) = g(x) + J(x) d + o(\|d\|)$.
- **Newton per i sistemi:** $x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}g(x_k)$, per $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- **Convergenza locale:** J continua, $g(\bar{x}) = 0$, $J(\bar{x})$ invertibile e x_0 abbastanza vicino a $\bar{x}$.
- **Criterio d'arresto:** $\|g(x_k)\| \leq \varepsilon$.
- **Hessiana:** $\nabla^2 f(x)$, jacobiana del gradiente, matrice $n \times n$ delle derivate seconde.
- **Due volte differenziabile:** $f(x + d) = f(x) + \nabla f(x)^\top d + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 f(x)d + o(\|d\|^2)$; hessiana simmetrica.
- **Classi:** C^0 continua, C^1 gradiente continuo, C^2 hessiana continua.

6 Esercizi

Esercizio 1 – Una hessiana 3×3

Calcolare la matrice hessiana di $f(x) = x_1^4 - 2x_2x_3$, con $x \in \mathbb{R}^3$.

Soluzione a pagina 8 →

Esercizio 2 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito A, esercizio 2

Sono assegnate le seguenti funzioni $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x_1, x_2, x_3) = (1, x_1 x_2 x_3)^T, \quad f(y_1, y_2) = \|(y_1, y_2)\|_2, \quad x_0 = (1, 1, 1)^T,$$

e la funzione $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ composizione di f e g , cioè $h(x) = f(g(x))$.

- (a) Calcolare lo jacobiano $J_g(x)$ e il vettore $\nabla h(x)$.
- (b) Scrivere l'equazione che definisce il piano tangente al grafico di h nel punto x_0 , determinandone anche il vettore normale.

Soluzione a pagina 8 →

Esercizio 3 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 2

Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile due volte ovunque. Individuare l'affermazione corretta.

- (a) Risulta $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$.
- (b) La matrice hessiana di f è una matrice diagonale.
- (c) La matrice hessiana di f è definita e simmetrica.
- (d) La matrice hessiana di f non è definita.

Soluzione a pagina 9 →

Esercizio 4 – Appello del 16/02/2026, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 3, adattato

Si consideri la seguente funzione di due variabili reali:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 12x - xy + \frac{y^2}{6}.$$

- (a) Calcolare il vettore gradiente e la matrice hessiana di f .
- (b) Calcolare il punto che si ottiene eseguendo una iterazione del metodo di Newton per il sistema $\nabla f(x, y) = 0$ a partire dal punto $(1, 1)$.

Soluzione a pagina 9 →

7 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Una hessiana 3×3

f ha tre variabili, quindi $\nabla^2 f(x)$ è 3×3 . Il gradiente è

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 \\ -2x_3 \\ -2x_2 \end{pmatrix}.$$

Le righe dell'hessiana sono i gradienti delle tre componenti:

1. $4x_1^3$ dipende solo da x_1 : $(12x_1^2, 0, 0)$;
2. $-2x_3$ dipende solo da x_3 : $(0, 0, -2)$;
3. $-2x_2$ dipende solo da x_2 : $(0, -2, 0)$.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice è simmetrica, come deve essere.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 6](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compito A, esercizio 2

- (a) La prima componente di g è costante, la seconda è $x_1 x_2 x_3$:

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Esplicitamente $h(x) = \sqrt{1 + x_1^2 x_2^2 x_3^2}$. Rispetto a x_1 , con le altre costanti, la derivata della radice dà $\frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = \frac{2x_1 x_2^2 x_3^2}{2\sqrt{1 + x_1^2 x_2^2 x_3^2}}$, e lo stesso per le altre due:

$$\nabla h(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2 x_2^2 x_3^2}} \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 x_3^2 \\ x_1^2 x_2 x_3^2 \\ x_1^2 x_2^2 x_3 \end{pmatrix}.$$

- (b) Le derivate parziali sono continue (il radicando è sempre almeno 1), quindi h è differenziabile e il piano tangente al grafico in $(x_0, h(x_0))$ sta in $\mathbb{R}^4$. In $x_0 = (1, 1, 1)$:

$$h(x_0) = \sqrt{2}, \quad \nabla h(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il piano tangente è

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^4 : y = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}((x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1)) \right\},$$

e il vettore normale è $(-\nabla h(x_0), 1) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 7](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 2

La (c) è corretta: per la condizione necessaria la hessiana esiste (è definita) ed è simmetrica in ogni punto. La (d) è quindi falsa, e la (a) anche, perché le due derivate miste sono le entrate (1, 3) e (3, 1) di una matrice simmetrica. La (b) è falsa: con $f(x) = x_1 x_2$ si ha

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = 1 \neq 0,$$

e la hessiana, costante, è continua: f è due volte differenziabile e la sua hessiana non è diagonale.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 7](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Appello del 16/02/2026, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 3, adattato

(a) Con l'altra variabile costante,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 4x + 12 - y \\ -x + \frac{y}{3} \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Le derivate miste valgono entrambe -1 .

(b) Il sistema è $g = \nabla f = 0$, e la jacobiana di g è la hessiana di f . In $(1, 1)$:

$$g(1, 1) = \begin{pmatrix} 8 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad J(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

con $\det J(1, 1) = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3} \neq 0$. Il passo s risolve $J(1, 1)s = -g(1, 1)$:

$$-2s_1 - s_2 = -8, \quad -s_1 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{2}{3}.$$

Dalla seconda $s_2 = 2 + 3s_1$, e la prima dà $-5s_1 - 2 = -8$, cioè $s_1 = \frac{6}{5}$ e $s_2 = \frac{28}{5}$.
Quindi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ 28/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 33/5 \end{pmatrix}.$$

[*← Torna all'Esercizio 4, pagina 7*](#)