

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Capitolo 3: Topologia di $\mathbb{R}^n$

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Punti interni, esterni e di frontiera · Accumulazione e punti isolati
Aperti e chiusi · Chiusura · Caratterizzazione dei chiusi
Unioni e intersezioni · Insiemi definiti da vincoli · Limitati e compatti
Domini di funzioni · Funzioni limitate · Teorema di Weierstrass

Indice

1	Punti interni, esterni e di frontiera	1
2	Punti di accumulazione e punti isolati	2
3	Insiemi aperti e chiusi	4
4	Chiusura di un insieme	5
5	Caratterizzazione degli insiemi chiusi	7
6	Insiemi definiti da equazioni e disequazioni	9
7	Insiemi limitati e compatti	10
8	Domini di funzioni	10
9	Funzioni limitate e teorema di Weierstrass	12
10	Esercizi	13
11	Soluzioni	16

1 Punti interni, esterni e di frontiera

Definizione – Punto interno

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $\bar{x} \in E$ è **interno** a E se esiste un intorno sferico di $\bar{x}$ tutto contenuto in E :

$$\exists \rho > 0 : \quad \mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq E.$$

L'insieme dei punti interni è l'**interno** di E , e si indica con $\overset{\circ}{E}$.

$\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \rho\}$ è l'intorno sferico del Capitolo 2, l'insieme dei punti che distano da $\bar{x}$ meno di ρ . Basta trovarne uno contenuto in E : ogni intorno sferico più piccolo, con lo stesso centro, lo è anche lui.

Il **complementare** di E è l'insieme dei punti che non gli appartengono, $\text{co}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin E\}$. Per esempio $\text{co}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ e $\text{co}(\emptyset) = \mathbb{R}^n$.

Definizione – Punto esterno

Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è **esterno** a E se è interno al complementare, cioè se ha un intorno sferico senza punti di E :

$$\exists \rho > 0 : \quad \mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq \text{co}(E).$$

Definizione – Punto di frontiera

Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è **di frontiera** per E se ogni suo intorno sferico contiene sia punti di E sia punti del complementare:

$$\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap E \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap \text{co}(E) \neq \emptyset \quad \forall \rho > 0.$$

L'insieme dei punti di frontiera è la **frontiera** di E , e si indica con ∂E .

Ogni punto di $\mathbb{R}^n$ è di uno solo dei tre tipi: se non è interno né esterno, ogni suo intorno sferico incontra sia E sia $\text{co}(E)$, quindi è di frontiera. Un punto interno appartiene a E , uno esterno no; un punto di frontiera può appartenere a E oppure no.

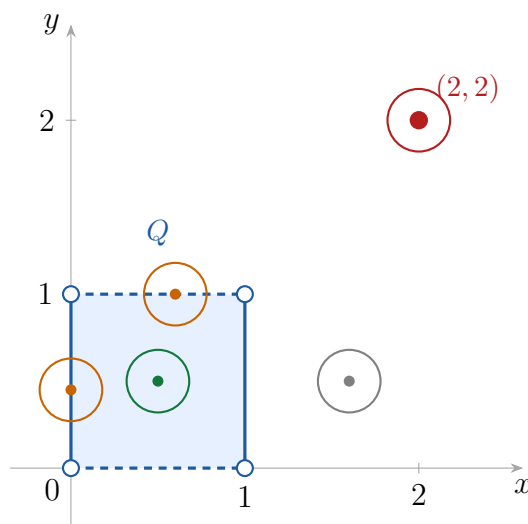
Esempio – Un quadrato con due lati esclusi e un punto

Sia

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1\} \cup \{(2, 2)\},$$

il quadrato di lato 1 senza i lati orizzontali $y = 0$ e $y = 1$, più il punto $(2, 2)$ (figura).

- Sono interni i punti con $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$: $\overset{\circ}{Q}$ è il quadrato senza i quattro lati.
- Sono di frontiera i quattro lati, compresi i due esclusi da Q : ogni intorno sferico di un loro punto contiene punti di Q e punti fuori. È di frontiera anche $(2, 2)$: ogni suo intorno sferico contiene $(2, 2) \in Q$ e punti fuori da Q .
- Tutti gli altri punti sono esterni.



Il quadrato di Q : lati continui inclusi, tratteggiati esclusi. Intorni di un punto interno (verde), di due punti di frontiera (arancione, il secondo fuori da Q), di un punto esterno (grigio) e di $(2, 2)$ (rosso).

2 Punti di accumulazione e punti isolati

Punto di accumulazione, derivato $\mathcal{D}(E)$ e punto isolato si definiscono come in $\mathbb{R}$ (Capitolo 2), con l'intorno sferico di $\mathbb{R}^n$. Per $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

- $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è **di accumulazione** per E se ogni suo intorno sferico contiene un punto di E diverso da $\bar{x}$, cioè $(\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap E) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$ per ogni $\rho > 0$;
- $\bar{x} \in E$ è **isolato** se non è di accumulazione, cioè se $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap E = \{\bar{x}\}$ per qualche $\rho > 0$.

Proposizione – Dove stanno i punti di accumulazione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

- (1) Ogni punto interno di E è di accumulazione.
- (2) Ogni punto isolato di E è di frontiera.
- (3) I punti di accumulazione sono i punti interni e i punti di frontiera non isolati:

$$\mathcal{D}(E) = \overset{\circ}{E} \cup (\partial E \setminus \{\text{punti isolati di } E\}).$$

Dimostrazione

- (1) Se $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq E$, ogni intorno sferico $\mathcal{B}_r(\bar{x})$ contiene $\mathcal{B}_{\min\{r,\rho\}}(\bar{x})$, fatto di punti di E , e questo contiene infiniti punti oltre a $\bar{x}$.
- (2) Un punto isolato $\bar{x}$ sta in E , quindi non è esterno; non è di accumulazione, quindi per il punto (1) non è interno. Resta la frontiera.
- (3) Un punto di accumulazione non è esterno, perché ogni suo intorno sferico contiene punti di E : è interno o di frontiera, e non è isolato. Viceversa, i punti interni sono di accumulazione per il punto (1). Un punto di frontiera non isolato è di accumulazione: se sta in E , perché non è isolato; se non sta in E , perché i punti di E che ogni suo intorno sferico contiene sono diversi da lui.

□

Esempio – Accumulazione nel quadrato

Per l'insieme Q della Sezione 1 il punto $(2, 2)$ è isolato: l'intorno sferico $\mathcal{B}_1((2, 2))$ non contiene altri punti di Q , perché il punto del quadrato più vicino, $(1, 1)$, dista $\sqrt{2}$. I punti di accumulazione sono il quadrato con tutti e quattro i lati:

$$\mathcal{D}(Q) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

I lati orizzontali non appartengono a Q ma sono di accumulazione; $(2, 2)$ appartiene a Q ma non è di accumulazione.

3 Insiemi aperti e chiusi

Definizione – Insieme aperto e insieme chiuso

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è

- **aperto** se ogni suo punto è interno, cioè $E = \overset{\circ}{E}$;
- **chiuso** se il suo complementare $\text{co}(E)$ è aperto.

Ogni punto di E è interno o di frontiera, quindi E è aperto se e solo se nessuno dei suoi punti di frontiera gli appartiene.

Aperto e chiuso non sono l'uno il contrario dell'altro: un insieme può essere né aperto né chiuso. È il caso di Q . Il punto $(0, \frac{1}{2})$ sta in Q ma non è interno, quindi Q non è aperto. Il punto $(\frac{1}{2}, 0)$ sta in $\text{co}(Q)$, ma ogni suo intorno sferico contiene punti di Q : non è interno a $\text{co}(Q)$, che quindi non è aperto, e Q non è chiuso. Gli Esercizi 3 e 4 lavorano su queste definizioni.

Proposizione – Il vuoto e $\mathbb{R}^n$

Gli insiemi $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono sia aperti sia chiusi.

Dimostrazione

- (1) $\emptyset$ è aperto perché non ha punti: la condizione “ogni suo punto è interno” è soddisfatta *vacuamente*, dato che non c'è nessun punto che la violi.
- (2) $\mathbb{R}^n$ è aperto perché ogni intorno sferico è contenuto in $\mathbb{R}^n$.
- (3) Poiché $\text{co}(\emptyset) = \mathbb{R}^n$ e $\text{co}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ sono aperti, $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono anche chiusi.

□

Si dimostra che $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono gli unici insiemi di $\mathbb{R}^n$ sia aperti sia chiusi.

Proposizione – Unioni e intersezioni

Siano A_i insiemi aperti e C_i insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$, con i in un insieme di indici I qualsiasi, finito o infinito, e sia $k \geq 1$ un intero. Allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ è aperto, } \bigcap_{i=1}^k A_i \text{ è aperto, } \bigcap_{i \in I} C_i \text{ è chiuso, } \bigcup_{i=1}^k C_i \text{ è chiuso.}$$

Dimostrazione

- (1) **Unione di aperti.** Un punto $\bar{x}$ dell'unione sta in qualche A_j , che è aperto: esiste $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq A_j$, contenuto anche nell'unione.
- (2) **Intersezione finita di aperti.** Se $\bar{x}$ sta in $A_1, \dots, A_k$, per ogni i esiste $\mathcal{B}_{\rho_i}(\bar{x}) \subseteq A_i$. Con $\rho = \min\{\rho_1, \dots, \rho_k\} > 0$ l'intorno $\mathcal{B}_\rho(\bar{x})$ sta in tutti gli A_i , quindi nell'intersezione.
- (3) **Chiusi.** Il complementare di un'intersezione è l'unione dei complementari, e viceversa: $\text{co}(\bigcap_i C_i) = \bigcup_i \text{co}(C_i)$ è un'unione di aperti, e $\text{co}(\bigcup_{i=1}^k C_i) = \bigcap_{i=1}^k \text{co}(C_i)$ un'intersezione finita di aperti. Per i punti (1) e (2) sono aperti.

□

Con infiniti aperti il passo (2) non funziona: i raggi possono diventare arbitrariamente piccoli, senza un raggio positivo più piccolo di tutti. Gli intorni $\mathcal{B}_{1/k}(0)$, $k = 1, 2, \dots$, sono aperti: un punto che dista $r < 1/k$ dall'origine ha attorno l'intorno di raggio $1/k - r$, contenuto in $\mathcal{B}_{1/k}(0)$. L'unico punto comune a tutti è però l'origine, e $\{0\}$ non è aperto.

4 Chiusura di un insieme

Definizione – Chiusura

La **chiusura** di $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'insieme E insieme ai suoi punti di frontiera:

$$\overline{E} = E \cup \partial E.$$

Proposizione – Tre scritture della chiusura

Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\overline{E} = E \cup \partial E = \mathring{E} \cup \partial E = E \cup \mathcal{D}(E).$$

Dimostrazione

- (1) Ogni punto di E è interno o di frontiera, quindi $E \cup \partial E = \mathring{E} \cup \partial E$.
- (2) Per la proposizione “Dove stanno i punti di accumulazione”, $\mathcal{D}(E)$ è contenuto in $\mathring{E} \cup \partial E$, quindi $E \cup \mathcal{D}(E) \subseteq E \cup \partial E$.
- (3) Un punto di frontiera che non sta in E è di accumulazione, perché i punti di E nei suoi intorni sono diversi da lui. Quindi $E \cup \partial E \subseteq E \cup \mathcal{D}(E)$.

□

Esempio – La chiusura del quadrato

Per Q la chiusura aggiunge i due lati orizzontali:

$$\overline{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(2, 2)\}.$$

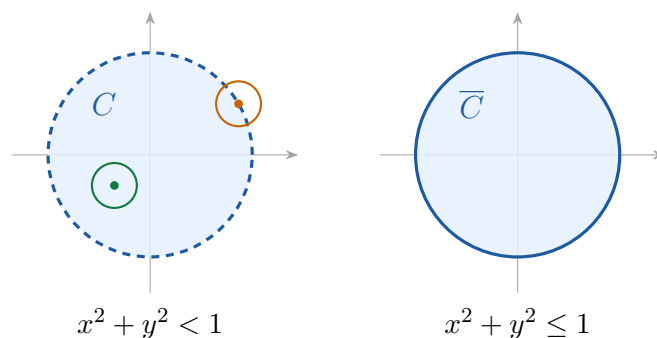
Basta sostituire le disuguaglianze strette su y con $0 \leq y \leq 1$. Qui $\overline{Q} \neq Q$.

Esempio – Disco aperto e disco chiuso

Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, il disco di centro l'origine e raggio 1 senza la circonferenza. Ogni punto di C è interno: se dista $r < 1$ dall'origine, l'intorno sferico di raggio $1 - r$ è contenuto in C . La frontiera è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, che non appartiene a C . Quindi

$$\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

e $\overline{C}$ coincide con la propria chiusura: la sua frontiera è ancora la circonferenza, che ora gli appartiene.



A sinistra C , senza la circonferenza: ogni intorno di un punto della circonferenza (arancione) esce dal disco. A destra la chiusura $\overline{C}$.

Esempio – Quattro punti in $\mathbb{R}^3$

Sia

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Ogni punto di P è isolato: un intorno sferico di raggio minore della distanza dagli altri tre non ne contiene altri. Un punto isolato è di frontiera, quindi nessun punto è interno. Fuori da P non ci sono altri punti di frontiera: un punto che non sta in P ha distanza positiva da ciascuno dei quattro, e un intorno di raggio minore non incontra P . Quindi

$$\overset{\circ}{P} = \emptyset, \quad \partial P = P, \quad \overline{P} = P.$$

5 Caratterizzazione degli insiemi chiusi

Proposizione – Caratterizzazione degli insiemi chiusi

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:

$$(1) \ E \text{ è chiuso}; \quad (2) \ \partial E \subseteq E; \quad (3) \ \mathcal{D}(E) \subseteq E.$$

Dimostrazione

Si dimostra il cerchio $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$: tre implicazioni bastano per l'equivalenza.

- (1) **(1) $\Rightarrow$ (2).** Dimostrare $\partial E \subseteq E$ equivale a dimostrare che un punto fuori da E non è di frontiera. Se $\bar{x} \notin E$, allora $\bar{x} \in \text{co}(E)$, che è aperto perché E è chiuso: esiste $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq \text{co}(E)$. Questo intorno non contiene punti di E , quindi $\bar{x} \notin \partial E$.
- (2) **(2) $\Rightarrow$ (3).** Per assurdo, sia $\bar{x} \in \mathcal{D}(E)$ con $\bar{x} \notin E$. Non è interno, perché non sta in E , e non è isolato, perché è di accumulazione: per la proposizione “Dove stanno i punti di accumulazione” è di frontiera. Allora $\bar{x} \in \partial E \subseteq E$, contro $\bar{x} \notin E$.
- (3) **(3) $\Rightarrow$ (1).** Si dimostra che $\text{co}(E)$ è aperto. Sia $\bar{x} \in \text{co}(E)$. Poiché $\mathcal{D}(E) \subseteq E$, $\bar{x}$ non è di accumulazione: un intorno $\mathcal{B}_\rho(\bar{x})$ non contiene punti di E diversi da $\bar{x}$, e poiché $\bar{x} \notin E$ non ne contiene nessuno. Quindi $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq \text{co}(E)$.

□

Proposizione – Chiuso e chiusura

Un insieme è chiuso se e solo se coincide con la propria chiusura:

$$E \text{ chiuso} \iff E = \overline{E}.$$

Infatti $\overline{E} = E \cup \partial E$ coincide con E se e solo se $\partial E \subseteq E$. Sono chiusi il disco $\overline{C}$ e l'insieme P dei quattro punti, e lo è ogni insieme con un numero finito di punti, per lo stesso ragionamento fatto su P . Non lo sono Q e C .

Esempio – Punti che si accumulano nell'origine

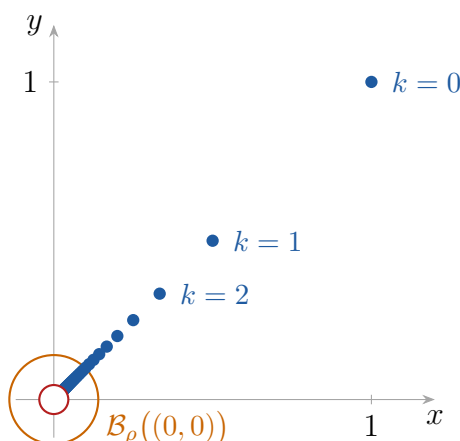
Sia

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1} \right) : k = 0, 1, 2, \dots \right\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

cioè i punti $(1, 1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\dots$ sulla bisettrice (figura).

- **Non è chiuso.** Il punto di indice k dista $\sqrt{2}/(k+1)$ dall'origine, quindi ogni intorno $\mathcal{B}_\rho((0,0))$ contiene i punti con $k+1 > \sqrt{2}/\rho$: l'origine è di accumulazione. Poiché $(0,0) \notin S$, per la caratterizzazione S non è chiuso.
- **Non è aperto.** Ogni punto di S è isolato: un intorno di raggio minore della distanza dai punti vicini non contiene altri punti di S . Un punto isolato è di frontiera, non interno.

L'origine è l'unico punto di accumulazione: vicino a un altro punto fuori da S cade solo un numero finito di punti di S , che un intorno abbastanza piccolo evita. Quindi S diventa chiuso aggiungendo l'origine, $S \cup \{(0,0)\}$, oppure tenendo solo un numero finito di punti, $k = 0, 1, \dots, K$.



I punti di S si addensano verso l'origine, che non appartiene a S : ogni suo intorno ne contiene infiniti.

6 Insiemi definiti da equazioni e disequazioni

Proposizione – Vincoli con funzioni continue

Siano $g_1, \dots, g_m$ e $h_1, \dots, h_p$ funzioni **continue** da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$.

- (1) Un insieme definito da sole disequazioni strette è aperto:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) < 0, i = 1, \dots, m\}.$$

- (2) Un insieme definito da equazioni e disequazioni non strette è chiuso:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m; h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p\}.$$

Una disequazione con $>$ o $\geq$ si riporta a queste cambiando segno: $g(x) > c$ equivale a $c - g(x) < 0$. È la forma dei vincoli dei modelli del Capitolo 1.

Dimostrazione

Si usa la *permanenza del segno* delle funzioni continue: se $g(\bar{x}) < 0$, allora $g(x) < 0$ per ogni x in un intorno sferico di $\bar{x}$ (e lo stesso con > 0).

- (1) Sia $\bar{x}$ nell'insieme, cioè $g_i(\bar{x}) < 0$ per ogni i . Per ogni i c'è un intorno sferico di $\bar{x}$ in cui g_i resta negativa; il più piccolo dei loro raggi dà un intorno contenuto nell'insieme. Ogni punto è interno.
- (2) Se $\bar{x}$ viola un vincolo, cioè $g_i(\bar{x}) > 0$ oppure $h_j(\bar{x}) \neq 0$, lo viola anche ogni punto di un suo intorno sferico: $\bar{x}$ è esterno. Quindi i punti di frontiera soddisfano tutti i vincoli e stanno nell'insieme, che per la caratterizzazione è chiuso.

□

I punti di frontiera, quindi, vanno cercati dove almeno un vincolo vale con l'uguaglianza. Con le sole disequazioni strette si escludono tutti, e restano solo punti interni; con equazioni e disequazioni non strette si includono.

Osservazione – Quando la regola non dice nulla

- Con disequazioni strette e non strette insieme la proposizione non si applica: l'insieme è spesso né aperto né chiuso, ma va controllato sulle definizioni.
- Senza continuità la regola cade. Con $g(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $g(x) = 1$ per $x > 0$, l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : g(x) < 1\} = (-\infty, 0]$ è definito da una disequazione stretta, ma 0 non è interno: non è aperto.

Esempio – La regola all’opera

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + 2y - z > -4\}$ è aperto: due disequazioni strette con polinomi, che sono continui.
- $C = \{x^2 + y^2 < 1\}$ è aperto e $\overline{C} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ è chiuso, come si è visto nella Sezione 4.
- Il quadrato $\{0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1\}$ mescola disuguaglianze strette e non strette: la proposizione non si applica, e infatti è né aperto né chiuso, come Q .

L'Esercizio 1 chiede come rendere Q chiuso, o aperto, cambiando le disuguaglianze.

7 Insiemi limitati e compatti

Definizione – Insieme limitato

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è **limitato** se la norma dei suoi elementi non supera una costante:

$$\exists M > 0 : \quad \|x\| \leq M \quad \forall x \in E.$$

Come in $\mathbb{R}$, con la norma al posto del valore assoluto: gli elementi di un insieme limitato non possono crescere arbitrariamente, e la norma misura quanto è grande un vettore.

Definizione – Insieme compatto

In $\mathbb{R}^n$ un insieme si dice **compatto** se è chiuso e limitato.

8 Domini di funzioni

Il dominio di una funzione (Capitolo 2) è di solito definito dalle condizioni che rendono calcolabile la sua espressione: l'argomento di un logaritmo positivo, quello di una radice quadrata non negativo, un denominatore non nullo. È un insieme definito da disequazioni, e la proposizione “Vincoli con funzioni continue” dice spesso subito se è aperto o chiuso.

Esempio – Il semipiano del logaritmo

Il dominio di $f(x, y) = \log(x + y - 1)$ è

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 > 0\},$$

il semipiano che non contiene l'origine (figura).

- **Aperto:** una sola disequazione stretta, con un polinomio.
- **Illimitato:** i punti (t, t) con $t > \frac{1}{2}$ stanno in D_1 e hanno norma $\sqrt{2}t$, che supera ogni costante.
- **Frontiera:** la retta $x + y - 1 = 0$, che non appartiene a D_1 : ogni intorno di un suo punto contiene punti con $x + y - 1 > 0$ e punti con $x + y - 1 < 0$.
- **Accumulazione:** i punti di D_1 e quelli della retta, $\mathcal{D}(D_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 \geq 0\}$.

Non è chiuso, perché i punti della retta sono di accumulazione e non gli appartengono; quindi non è compatto.

Esempio – Un disco bucato

Il dominio di

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$$

chiede $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ per la radice e $x^2 + y^2 \neq 0$ per il denominatore. Una somma di quadrati è nulla solo se lo sono entrambi, quindi la seconda condizione toglie soltanto l'origine:

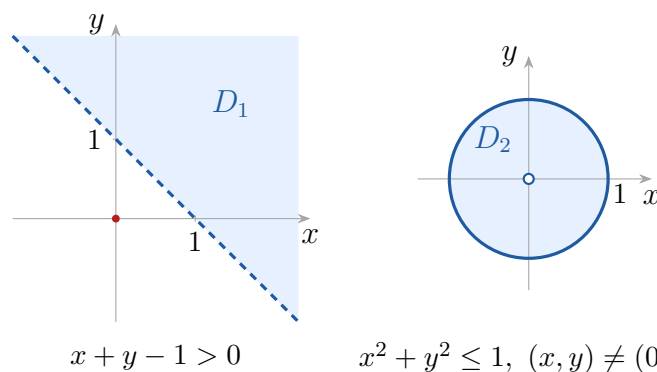
$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\},$$

il disco chiuso di raggio 1 senza il centro (figura).

- **Interni:** i punti con $0 < x^2 + y^2 < 1$.
- **Frontiera:** la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, che appartiene a D_2 , e l'origine, che non gli appartiene.
- **Accumulazione:** tutto il disco chiuso, origine compresa.
- **Limitato:** $\|x\| \leq 1$ per ogni $x \in D_2$.

Non è chiuso, perché l'origine è di accumulazione e non sta in D_2 . Non è aperto, perché contiene i punti della circonferenza, che sono di frontiera. È limitato ma non chiuso, quindi non è compatto.

Scritta come $x^2 + y^2 > 0$, la condizione sul denominatore è una disequazione stretta: D_2 mescola disequazioni strette e non strette, ed è infatti né aperto né chiuso. L'Esercizio 2 chiede di costruire una funzione con dominio chiuso e illimitato.



A sinistra D_1 : la retta tratteggiata non gli appartiene, e l'origine (rossa) sta dall'altra parte. A destra D_2 : la circonferenza gli appartiene, il centro no.

Gli insiemi del capitolo a confronto:

Insieme	aperto	chiuso	limitato	compatto
Q , quadrato con $(2, 2)$	no	no	sì	no
C , disco aperto	sì	no	sì	no
$\overline{C}$, disco chiuso	no	sì	sì	sì
P , quattro punti	no	sì	sì	sì
S , punti verso l'origine	no	no	sì	no
D_1 , semipiano del logaritmo	sì	no	no	no
D_2 , disco bucato	no	no	sì	no
$\emptyset$	sì	sì	sì	sì
$\mathbb{R}^n$	sì	sì	no	no

9 Funzioni limitate e teorema di Weierstrass

Definizione – Funzione limitata

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è **limitata** su D se la norma dei suoi valori non supera una costante:

$$\exists M > 0 : \quad \|f(x)\| \leq M \quad \forall x \in D.$$

Per una funzione a valori scalari ($m = 1$) la norma è il valore assoluto: $|f(x)| \leq M$. È la definizione di insieme limitato applicata ai valori: f è limitata se e solo se l'insieme $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ è limitato. Fra valori scalari e vettoriali cambia solo il modo di misurare il valore.

Per f a valori scalari si distinguono anche i due lati: f è **limitata inferiormente** su D se esiste $m \in \mathbb{R}$ con $f(x) \geq m$ per ogni $x \in D$, e **limitata superiormente** se esiste $M \in \mathbb{R}$ con $f(x) \leq M$ per ogni $x \in D$. È limitata se e solo se lo è da entrambi i lati.

Teorema – Weierstrass

Siano

- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme **non vuoto** e **compatto**;
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione **continua** su E .

Allora f ammette su E minimo e massimo: esistono $x_{\min}, x_{\max} \in E$ tali che

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in E.$$

$x_{\min}$ è un punto di **minimo globale** e $x_{\max}$ un punto di **massimo globale** di f su E . In particolare f è limitata su E . L'Esercizio 5 mostra che senza continuità o senza compattezza il minimo può mancare, e l'Esercizio 6 che non basta che f sia limitata inferiormente.

Riepilogo

- **Tre tipi di punti:** $\bar{x}$ è interno se $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq E$ per qualche ρ , esterno se è interno a $\text{co}(E)$, di frontiera se ogni intorno incontra E e $\text{co}(E)$.
- **Accumulazione:** $\mathcal{D}(E) = \mathring{E} \cup (\partial E \setminus \{\text{isolati}\})$; ogni punto isolato è di frontiera.
- **Aperto e chiuso:** aperto se $E = \mathring{E}$, chiuso se $\text{co}(E)$ è aperto; $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono entrambe le cose.
- **Unioni e intersezioni:** unioni qualsiasi e intersezioni finite di aperti sono aperte; intersezioni qualsiasi e unioni finite di chiusi sono chiuse.
- **Chiusura e chiusi:** $\overline{E} = E \cup \partial E = E \cup \mathcal{D}(E)$; E chiuso $\iff \partial E \subseteq E \iff \mathcal{D}(E) \subseteq E \iff E = \overline{E}$.
- **Vincoli continui:** solo disequazioni strette danno un aperto; equazioni e disequazioni non strette un chiuso. Vale anche per i domini.
- **Limitati e compatti:** E limitato se $\|x\| \leq M$ su E , compatto se chiuso e limitato; f limitata se $\|f(x)\| \leq M$ su D .
- **Weierstrass:** f continua su $E \neq \emptyset$ compatto ammette minimo e massimo.

10 Esercizi

Esercizio 1 – Rendere il quadrato chiuso o aperto

Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1\} \cup \{(2, 2)\}$.

- (a) Cambiare le disuguaglianze in modo da ottenere un insieme chiuso che contenga Q .

- (b) Si ottiene un insieme aperto rendendo strette tutte le disuguaglianze?

Soluzione a pagina 16 →

Esercizio 2 – Un dominio chiuso e illimitato

- (a) Definire una funzione di due variabili il cui dominio sia chiuso e illimitato.
 (b) Come si risponde se il dominio deve essere diverso da $\mathbb{R}^2$?

Soluzione a pagina 16 →

Esercizio 3 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 2 dei compiti A-D

Siano $\tilde{a}\tilde{b}$ le ultime due cifre del proprio numero di matricola, e $a = \max\{1, \tilde{a}\}$, $b = \max\{1, \tilde{b}\}$. Definire (matematicamente) un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che:

- (a) (compito A) $\overset{\circ}{D}$ sia vuoto, ∂D sia illimitato e $(a, b) \in \partial D$;
 (b) (compito B) $D = \partial D$, D sia illimitato e $(a, b) \in D$;
 (c) (compito C) D sia né chiuso né aperto e $(a, b) \in \partial D \setminus D$;
 (d) (compito D) D sia né chiuso né aperto e $(a, b) \in \partial D \cap D$.

Soluzione a pagina 17 →

Esercizio 4 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 2

Dati tre punti distinti $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e un raggio $\varepsilon > 0$ tale che $y, z \notin \mathcal{B}_\varepsilon(x)$, sia $A = \mathcal{B}_\varepsilon(x) \cup \{y, z\}$. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

- (a) L'insieme A è né chiuso né aperto.
 (b) Nessun punto di frontiera per A appartiene ad A .
 (c) L'insieme A è aperto.
 (d) L'insieme A è chiuso.

Soluzione a pagina 17 →

Esercizio 5 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 10

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione nonlineare e $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

- (a) Se $X \neq \emptyset$ e compatto, allora f ammette certamente minimo globale su X .
- (b) Se $X \neq \mathbb{R}^n$, allora f ammette certamente minimo globale su X .
- (c) Se $X \neq \emptyset$, allora f ammette certamente minimo globale su X .
- (d) Se $X \neq \emptyset$, compatto e f continua su X , allora f ammette massimo globale su X .

Soluzione a pagina 18 →

Esercizio 6 – Appello di Analisi Matematica II del 11/07/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, test preliminare A, domanda 1

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di $n > 1$ variabili definita su $D \subset \mathbb{R}^n$ tale che $D \neq \emptyset$. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

- (a) Se esiste un $x^* \in D$ tale che $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in D$, x^* è massimo globale di f su D .
- (b) Se f è limitata inferiormente su D allora esiste un minimo globale x^* di f su D .
- (c) Se esiste un $x^* \in D$ tale che $f(x^*) \geq f(x)$ per ogni $x \in D$, $-f$ ammette minimo globale su D .
- (d) Se f ammette minimo globale su D , la funzione $-f$ non può ammettere massimo globale su D .

Soluzione a pagina 18 →

11 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Rendere il quadrato chiuso o aperto

(a) Basta rendere non strette le disuguaglianze su y :

$$Q' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(2, 2)\},$$

che è la chiusura $\overline{Q}$. Il quadrato $K = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ è chiuso, perché definito da disequazioni non strette con polinomi. Per vedere che Q' è chiuso si mostra che $\text{co}(Q')$ è aperto. Un punto $\bar{x} \notin Q'$ sta in $\text{co}(K)$, che è aperto: ha un intorno sferico fuori da K . Riducendo il raggio sotto la distanza da $(2, 2)$, l'intorno evita anche $(2, 2)$ ed è contenuto in $\text{co}(Q')$.

(b) No. Con tutte le disuguaglianze strette si ottiene $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\} \cup \{(2, 2)\}$, che non è aperto: $(2, 2)$ è isolato, quindi di frontiera e non interno. Per avere un aperto bisogna togliere anche il punto $(2, 2)$: $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\} = \overset{\circ}{Q}$ è aperto, perché definito da sole disequazioni strette con polinomi.

← Torna all'Esercizio 1, pagina 13

Soluzione dell'Esercizio 2 – Un dominio chiuso e illimitato

(a) Basta una funzione definita su tutto il piano, per esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2$, che è chiuso (e anche aperto) e illimitato.

(b) Si parte dal semipiano D_1 del logaritmo, che è illimitato ma aperto perché la retta $x + y - 1 = 0$ non gli appartiene. Una radice quadrata ammette anche l'argomento nullo, e quindi include la retta: il dominio di

$$f(x, y) = \sqrt{x + y - 1}$$

è

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 \geq 0\}.$$

- **Chiuso:** una disequazione non stretta con un polinomio. La sua frontiera è la retta, che ora gli appartiene.
- **Illimitato:** contiene i punti (t, t) con $t \geq \frac{1}{2}$, di norma $\sqrt{2}t$ arbitrariamente grande.
- **Diverso da $\mathbb{R}^2$:** $(0, 0) \notin D_3$, perché $-1 \geq 0$ è falso.

← Torna all'Esercizio 2, pagina 14

Soluzione dell'Esercizio 3 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 2 dei compiti A-D

Qui a e b sono interi fra 1 e 9.

(a) e (b). La retta per (a, b) di pendenza 1,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = b - a\},$$

soddisfa entrambe le richieste. È chiusa, perché definita da un'equazione con un polinomio, quindi $\partial D \subseteq D$. Nessun suo punto è interno, perché ogni intorno sferico di un punto della retta contiene punti fuori dalla retta: $\overset{\circ}{D} = \emptyset$, e ogni punto di D è di frontiera, cioè $\partial D = D$. La retta è illimitata: i suoi punti $(a + t, b + t)$, $t > 0$, hanno norma almeno $a + t$, che supera ogni costante M . Infine (a, b) sta sulla retta, quindi in $D = \partial D$.

(c) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < a, 0 \leq y \leq b + 1\}$.

- $(a, b) \notin D$, perché $x = a$ non soddisfa $x < a$.
- $(a, b) \in \partial D$: ogni intorno sferico $\mathcal{B}_\rho((a, b))$ contiene $(a - t, b) \in D$ con $0 < t < \min\{\rho, a\}$, e $(a + t, b) \notin D$.
- D non è chiuso, perché $(a, b) \in \partial D \setminus D$; non è aperto, perché l'origine sta in D ma non è interna: i punti $(-t, 0)$, $t > 0$, non stanno in D .

(d) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq a, 0 \leq y \leq b + 1\}$.

- $(a, b) \in D$, e ogni suo intorno sferico contiene $(a + t, b) \notin D$ per $t > 0$ piccolo: $(a, b) \in \partial D \cap D$. Quindi D non è aperto.
- D non è chiuso: $(0, b)$ non sta in D , ma ogni suo intorno sferico contiene $(t, b) \in D$ per $t > 0$ piccolo, quindi $(0, b) \in \partial D \setminus D$.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 14](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 2

Si usa la norma euclidea.

- (1) **y è di frontiera e sta in A .** Poiché $y \notin \mathcal{B}_\varepsilon(x)$, $\|y - x\| \geq \varepsilon$. I punti $y + tu$, con $u = (y - x)/\|y - x\|$ e $t > 0$, distano da x esattamente $\|y - x\| + t > \varepsilon$, quindi non stanno nella palla; al più uno di loro è z . Ogni intorno $\mathcal{B}_\rho(y)$ contiene quelli con $t < \rho$: contiene punti fuori da A , oltre a $y \in A$. Quindi $y \in \partial A$, e (b) è falsa; $y \in A$ non è interno, quindi A non è aperto e (c) è falsa.
- (2) **Per $n \geq 2$ A non è chiuso.** La sfera $\{p : \|p - x\| = \varepsilon\}$ ha infiniti punti; se ne sceglie uno, $p \neq y, z$, che non sta in A . Per $0 < t < 1$ i punti $x + (1 \pm t)(p - x)$

distano $t\varepsilon$ da p , quindi stanno in $\mathcal{B}_\rho(p)$ se $t\varepsilon < \rho$. Il primo, $x + (1-t)(p-x)$, dista $(1-t)\varepsilon < \varepsilon$ da x e sta in A . Il secondo dista $(1+t)\varepsilon$ da x e, tranne al più due valori di t , non è y né z : non sta in A . Quindi $p \in \partial A \setminus A$, e A non è chiuso.

- (3) **Il caso** $n = 1$. La “sfera” è $\{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$. Se y e z sono proprio questi due punti, $A = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ è chiuso, perché definito da disequazioni non strette. Altrimenti uno dei due estremi resta fuori da A ed è di frontiera, come al punto (2).

Per $n \geq 2$: (a) vera, (b) falsa, (c) falsa, (d) falsa. Per $n = 1$ con $\{y, z\} = \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$, invece, (a) è falsa e (d) è vera.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 14](#)

Soluzione dell'Esercizio 5 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 10

f ammette minimo globale su X se esiste $x^* \in X$ con $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$.

(a) Falsa: manca la continuità. Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$, non vuoto, chiuso (disequazione non stretta con un polinomio) e limitato, quindi compatto. Sia

$$f(x) = \|x\|_2^2 \text{ per } x \neq 0, \quad f(0) = 1,$$

nonlineare perché $f(0) \neq 0$. Nessun punto di X è di minimo: se $x \neq 0$, il punto $x/2 \in X$ ha $f(x/2) = \|x\|_2^2/4 < f(x)$; per $x = 0$, il punto $\frac{1}{2}e_1$ ha $f = \frac{1}{4} < 1$.

(b) e (c) False: manca la compattezza. Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$, non vuoto e diverso da $\mathbb{R}^n$, e $f(x) = x_1^2$, continua e nonlineare. Per ogni $x \in X$ il punto ottenuto dimezzando la prima componente sta in X e ha valore $x_1^2/4 < f(x)$: nessun punto è di minimo. X è aperto e non chiuso, quindi non è compatto.

(d) Vera: è il teorema di Weierstrass.

[← Torna all'Esercizio 5, pagina 15](#)

Soluzione dell'Esercizio 6 – Appello di Analisi Matematica II del 11/07/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, test preliminare A, domanda 1

x^* è di minimo globale se $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in D$, di massimo globale se $f(x^*) \geq f(x)$ per ogni $x \in D$.

(a) Falsa: la condizione dice che x^* è di *minimo* globale. Con $D = \mathbb{R}^n$, $f(x) = \|x\|_2^2$ e $x^* = 0$ si ha $f(0) = 0 \leq f(x)$ per ogni x , ma $f(e_1) = 1 > f(0)$, quindi 0 non è di massimo.

(b) Falsa. Sia $D = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$ e $f(x) = x_1$. Si ha $f(x) > 0$ su D , quindi f è limitata inferiormente; ma per ogni $x \in D$ il punto ottenuto dimezzando la prima componente sta in D e ha valore $x_1/2 < f(x)$: nessun punto è di minimo.

(c) Vera: moltiplicando per -1 , $f(x^*) \geq f(x)$ diventa $-f(x^*) \leq -f(x)$ per ogni $x \in D$, cioè x^* è di minimo globale per $-f$.

(d) Falsa: se x^* è di minimo globale per f , allo stesso modo $-f(x^*) \geq -f(x)$ per ogni $x \in D$, e x^* è di massimo globale per $-f$. Quindi $-f$ ammette sempre massimo.

[*← Torna all'Esercizio 6, pagina 15*](#)