

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Capitolo 4: Limiti di funzioni di più variabili

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Limite in $\mathbb{R}$ e intorno · Limiti infiniti e all'infinito
Limite in $\mathbb{R}^n$ · Funzioni a valori vettoriali · Punto all'infinito di $\mathbb{R}^n$
Una definizione per tutti i limiti

Indice

1	Il limite in $\mathbb{R}$	1
2	Il limite in $\mathbb{R}^n$	2
3	Funzioni a valori vettoriali	3
4	Il punto all'infinito di $\mathbb{R}^n$	3
5	Una definizione per tutti i limiti	5
6	Esercizi	7
7	Soluzioni	8

1 Il limite in $\mathbb{R}$

Definizione – Limite finito in un punto

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione di D . Si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Studiare il limite in x_0 significa guardare f quando x è arbitrariamente vicino a x_0 . Per avvicinarsi a x_0 con punti di D diversi da x_0 , il punto deve essere di accumulazione per D : in un punto isolato il limite non ha senso.

Il punto x_0 può non appartenere a D . La condizione $0 < |x - x_0|$ esclude x_0 : $f(x_0)$ può non esistere, e se esiste non conta.

Esempio – Il valore nel punto non conta

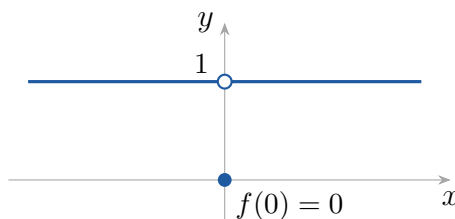
Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x) = 1 \text{ per } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0.$$

Il dominio è $\mathbb{R}$ e 0 è di accumulazione. Per $x \neq 0$ si ha $|f(x) - 1| = 0$, minore di ogni $\varepsilon > 0$ con qualsiasi δ .



Il grafico di f : vicino a 0 i valori sono 1, e il limite è 1 anche se $f(0) = 0$.

Nella definizione compaiono due intorni sferici: quello di x_0 di raggio δ , senza x_0 , e quello di L di raggio ε . Per ogni intorno sferico di L esiste un intorno sferico di x_0 i cui punti di D , tolto x_0 , hanno l'immagine nel primo:

$$f((\mathcal{B}_\delta(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\}) \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(L)$$

Tutte le definizioni di limite di questo capitolo hanno questa forma: cambiano solo gli intorni.

Definizione – Limite infinito in un punto

Con f e x_0 come sopra, si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M \quad (\text{rispettivamente } f(x) < M).$$

Anche qui la definizione accoppia un intorno di x_0 con un intorno del limite, di $+\infty$ o di $-\infty$ (Capitolo 2).

Definizione – Limite per $x \rightarrow \pm\infty$

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $+\infty$ un punto di accumulazione di D . Si scrive $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$x \in D, x > A \implies |f(x) - L| < \varepsilon;$$

si scrive $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$x \in D, x > A \implies f(x) > M \quad (\text{rispettivamente } f(x) < M).$$

Per $x \rightarrow -\infty$, con $-\infty$ di accumulazione per D , in entrambe la condizione sul punto diventa

$$x \in D, x < A.$$

Cambia solo l'intorno del punto: un intorno di $+\infty$ o di $-\infty$ al posto di un intorno di x_0 .

2 Il limite in $\mathbb{R}^n$

Definizione – Limite di una funzione di più variabili

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di D . Si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D, 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon;$$

si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D, 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) > M \quad (\text{rispettivamente } f(x) < M).$$

Cambia solo la distanza da x_0 : il valore assoluto diventa una norma, e l'intorno di x_0 è l'intorno sferico di $\mathbb{R}^n$, senza x_0 . Sull'uscita resta il valore assoluto, perché $f(x)$ e L sono numeri.

La norma può essere una qualsiasi di quelle del Capitolo 2: in $\mathbb{R}^n$ il limite non dipende dalla norma scelta. L'Esercizio 1 mette alla prova la definizione.

3 Funzioni a valori vettoriali

Definizione – Limite di una funzione a valori vettoriali

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $m > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di D e $L \in \mathbb{R}^m$. Si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D, 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - L\| < \varepsilon.$$

Ora anche $f(x)$ e L sono vettori, e la loro distanza si misura con una norma di $\mathbb{R}^m$. Il concetto non cambia: da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$, e da valori scalari a valori vettoriali, il valore assoluto diventa una norma, una stanghetta in più.

Per una funzione a valori vettoriali non ha senso chiedere $f(x) > M$: per $m > 1$ lo spazio $\mathbb{R}^m$ non è totalmente ordinato, e non ha un $+\infty$ e un $-\infty$. Per andare all'infinito in $\mathbb{R}^n$ serve un altro elemento.

4 Il punto all'infinito di $\mathbb{R}^n$

Definizione – Punto all'infinito e suoi intorni

A $\mathbb{R}^n$ si aggiunge un solo elemento, il **punto all'infinito** ∞ :

$$\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

Dato $A > 0$, un **intorno di** ∞ è l'insieme dei punti di norma maggiore di A :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > A\}.$$

In $\mathbb{R}$, totalmente ordinato, all'infinito ci sono due elementi, $+\infty$ e $-\infty$; in $\mathbb{R}^n$ ce n'è uno solo, arbitrariamente lontano dall'origine. Poiché $\|x\|$ è la distanza di x dall'origine, $x \rightarrow \infty$ significa $\|x\| \rightarrow +\infty$. Conta solo la norma, non il segno delle componenti: anche se una componente va verso $-\infty$, il punto va verso ∞ .

Con l'intorno si definisce, come per un punto di $\mathbb{R}^n$, quando ∞ è di accumulazione per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$: se ogni intorno di ∞ contiene punti di E .

Proposizione – Accumulazione all'infinito

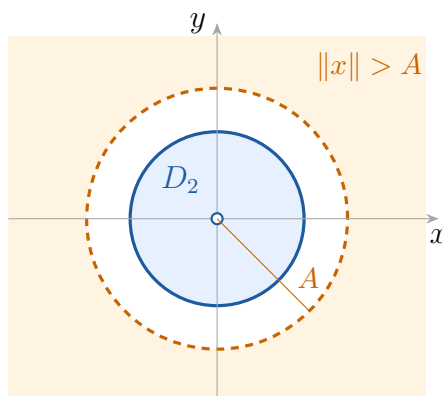
Per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\infty \text{ è di accumulazione per } E \iff E \text{ è illimitato.}$$

Infatti ogni intorno $\{\|x\| > A\}$ contiene punti di E se e solo se, per ogni $A > 0$, E ha punti di norma maggiore di A : è la negazione della definizione di insieme limitato del Capitolo 3.

Esempio – I domini del Capitolo 3

- Il semipiano $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 > 0\}$, dominio di $\log(x + y - 1)$, è illimitato: ∞ è di accumulazione, e si può studiare il limite di $\log(x + y - 1)$ per $(x, y) \rightarrow \infty$. Fra i suoi punti di norma grande ce ne sono anche con $x \rightarrow -\infty$, come $(-t, 2t)$ con $t > 1$: conta la norma.
- Il disco bucato $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$ è limitato: l'intorno $\{\|x\| > 1\}$ di ∞ non contiene punti di D_2 (figura). Il limite per $(x, y) \rightarrow \infty$ non si può porre.



Un intorno di ∞ in $\mathbb{R}^2$ (arancione): i punti fuori dal disco di raggio A , bordo escluso. Per $A \geq 1$ non incontra D_2 .

Definizione – Limite per $x \rightarrow \infty$

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e ∞ un punto di accumulazione di D . Si scrive $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A > 0$ tale che

$$x \in D, \|x\| > A \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Si scrive $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $A > 0$ tale che

$$x \in D, \|x\| > A \implies f(x) > M \quad (\text{rispettivamente } f(x) < M).$$

È lo stesso gioco di interni: cambia solo l'intorno del punto, ora un intorno di ∞ .

Definizione – Limite ∞ di una funzione a valori vettoriali

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $m > 1$, e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di D . Si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D, 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x)\| > M.$$

Per $x \rightarrow \infty$, con ∞ di accumulazione per D , la condizione sul punto diventa

$$x \in D, \|x\| > A,$$

con $A > 0$ che dipende da M .

I valori $f(x)$ entrano negli interni di ∞ in $\mathbb{R}^m$. Il limite di una funzione a valori vettoriali, se esiste, è quindi un vettore $L \in \mathbb{R}^m$ oppure ∞ , mai $+\infty$ o $-\infty$.

Osservazione – Prima l'accumulazione

Davanti a un limite la prima domanda è se il punto verso cui si tende, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ oppure ∞ , sia di accumulazione per il dominio. Solo dopo ci si chiede se il limite esiste e se è finito o infinito.

5 Una definizione per tutti i limiti

Definizione – Interni sferici e interni

Ogni elemento di $\mathbb{R}^*$ e di $\mathbb{R}_*^n$ ha i suoi **interni sferici**:

di $x_0 \in \mathbb{R}^n$	$\mathcal{B}_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x - x_0\ < \rho\},$	$\rho > 0;$
di $+\infty$	$\{x \in \mathbb{R} : x > A\} \cup \{+\infty\},$	$A \in \mathbb{R};$
di $-\infty$	$\{x \in \mathbb{R} : x < A\} \cup \{-\infty\},$	$A \in \mathbb{R};$
di ∞	$\{x \in \mathbb{R}^n : \ x\ > A\} \cup \{\infty\},$	$A > 0.$

Nello spazio esteso, un **intorno** di un elemento è un insieme aperto che contiene un suo intorno sferico.

Gli interni sferici di $\pm\infty$ e di ∞ sono gli interni delle sezioni precedenti con l'elemento stesso aggiunto, come x_0 appartiene ai propri interni sferici; quegli interni ne sono la parte in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$. Un insieme dello spazio esteso è aperto se la sua parte in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$ è aperta e se, per ogni elemento infinito che contiene, contiene anche un suo intorno sferico.

Questi interni non coincidono con quelli del Capitolo 2, intervalli che contengono un intorno sferico: $[-1, 1]$ è un intorno di 0 lì, non qui, perché non è aperto.

Definizione – Limite

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}_*^n$ un punto di accumulazione di D e $L \in \mathbb{R}_*^m$. Si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se per ogni intorno $\mathcal{U}(L)$ esiste un intorno $\mathcal{N}(x_0)$ tale che

$$x \in (\mathcal{N}(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in \mathcal{U}(L).$$

Per $n = 1$ al posto di $\mathbb{R}_*^n$ si usa $\mathbb{R}^*$; per $m = 1$, al posto di $\mathbb{R}_*^m$.

Il punto x_0 può essere un vettore o un elemento infinito, il limite L un vettore, un numero, $+\infty$, $-\infty$ oppure ∞ .

Per i limiti la differenza non conta: basta la famiglia degli intorni sferici, perché ogni intorno, nell'uno o nell'altro senso, ne contiene uno. Con intorni sferici la definizione ridà quelle delle sezioni precedenti: ε , δ , M e A sono raggi e soglie degli intorni. Per $x \in D$:

Limite	vicino al punto	vicino al limite
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x_0$, limite L	$0 < x - x_0 < \delta$	$ f(x) - L < \varepsilon$
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow +\infty$, limite L	$x > A$	$ f(x) - L < \varepsilon$
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x_0$, limite L	$0 < \ x - x_0\ < \delta$	$ f(x) - L < \varepsilon$
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x_0$, limite $\pm\infty$	$0 < \ x - x_0\ < \delta$	$f(x) > M$ oppure $f(x) < M$
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \infty$, limite L	$\ x\ > A$	$ f(x) - L < \varepsilon$
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \rightarrow x_0$, limite L	$0 < \ x - x_0\ < \delta$	$\ f(x) - L\ < \varepsilon$
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \rightarrow x_0$, limite ∞	$0 < \ x - x_0\ < \delta$	$\ f(x)\ > M$

L'elemento aggiunto agli intorni sferici non cambia nulla: x_0 è escluso, e $f(x)$ non è mai infinito.

Proposizione – Unicità del limite

Se il limite di f per $x \rightarrow x_0$ esiste, è unico.

Riepilogo

- **Prima l'accumulazione:** x_0 di accumulazione per D ; $f(x_0)$ non conta.
- **Definizione unica:** $f((\mathcal{N}(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\}) \subseteq \mathcal{U}(L)$; il limite è unico.
- **Limite in $\mathbb{R}^n$:** $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
- **Valori vettoriali:** $0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$.
- **Limite infinito:** $f(x) > M$, $f(x) < M$; $\|f(x)\| > M$ se vettoriale.
- **Limite all'infinito:** $x > A$, $x < A$ in $\mathbb{R}$; $\|x\| > A$ in $\mathbb{R}^n$.
- **Punto all'infinito:** $\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, intorni $\{\|x\| > A\}$.
- **Accumulazione all'infinito:** se e solo se l'insieme è illimitato.

6 Esercizi

Esercizio 1 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 8

Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, supponiamo che risulti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. Individuare l'affermazione corretta.

- Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $\|x\| > \delta$.
- Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < \|x - x_0\| < \delta$.
- Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\delta > 0$ risulta $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < \|x - x_0\| < \delta$.
- Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) > \varepsilon$ quando $0 < \|x - x_0\| < \delta$.

Soluzione a pagina 8 →

7 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Appello del 29/01/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 8

È corretta la (b): è la definizione di limite, con $D = \mathbb{R}^n$, di cui ogni punto è di accumulazione.

Le altre sono false; basta un controesempio, con e_1 il vettore di $\mathbb{R}^n$ con prima componente 1 e le altre nulle: $f(x) = \|x\|_2$, con $x_0 = 0$ e $L = 0$. Il limite vale 0: per ogni $\varepsilon > 0$, con $\delta = \varepsilon$,

$$0 < \|x\|_2 < \delta \implies |f(x) - 0| = \|x\|_2 < \varepsilon.$$

(a) Falsa: chiede che f sia vicina a L lontano dall'origine, cioè $\|x\| > \delta$ descrive un intorno di ∞ , non di x_0 : è la forma del limite per $x \rightarrow \infty$. Con $\varepsilon = 1$ e un δ qualsiasi, il punto $x = (\max\{\delta, 1\} + 1)e_1$ ha $\|x\|_2 > \delta$ ma $|f(x) - 0| = \max\{\delta, 1\} + 1 > 1$.

(c) Falsa: δ non si può scegliere grande a piacere. Con $\varepsilon = 1$ e $\delta = 2$, il punto $x = e_1$ ha $0 < \|x\|_2 = 1 < 2$ ma $|f(x) - 0| = 1$, che non è minore di 1.

(d) Falsa: $f(x) > \varepsilon$ per ogni ε vicino a x_0 è la forma del limite $+\infty$, non di un limite finito. Con $\varepsilon = 1$ e un δ qualsiasi, il punto $x = \frac{1}{2} \min\{\delta, 1\} e_1$ ha $0 < \|x\|_2 < \delta$ ma $f(x) = \frac{1}{2} \min\{\delta, 1\} < 1$.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 7](#)